

- EXERCICE 1 -

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

- Justifier que pour tout $\epsilon > 0$, on a : $P\left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon\right) \leq P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right)$.
- En déduire, en utilisant l'inégalité de BT avec une valeur de ϵ bien choisie, que : $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$.

- EXERCICE 2 -

Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire vérifiant $E(X^2) = 2a$ et $V(X^2) = 4a^2$.
On considère n variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2$

- Déterminer l'espérance et la variance de S_n .
- Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n puis en déduire :

$$\forall \epsilon > 0, P(|S_n - a| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{a^2}{n\epsilon^2}$$

- On pose $a = 1$. Déterminer une valeur de n telle que la probabilité que S_n appartienne à l'intervalle $[0.9; 1.1]$ soit supérieure à 0.95.

- EXERCICE 3 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n^2 x e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet pour densité f_n .
 - Déterminer la fonction de répartition de X_n .
 - Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- EXERCICE 4 -

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une variable aléatoire X_n prenant ses valeurs dans $\llbracket 2; n+1 \rrbracket$ et vérifiant : $\forall k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

- Pour tout entier $k \geq 2$, on pose : $u_k = \frac{k-1}{k!}$. Vérifier que la suite u définit une loi de probabilité.
On considère alors une variable aléatoire Z telle que pour tout $k \geq 2$, $P(Z = k) = u_k$.
- Montrer que $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
 - Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers Z .

- EXERCICE 5 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} a_n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Déterminer a_n pour que f_n soit une densité de probabilité.
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité telle que X_n admette f_n pour densité.
 - Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n .
 - Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z que l'on déterminera.

- EXERCICE 6 -

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $Z_n = \sup(X_1, \dots, X_n) - \ln(n)$, et on admet que Z_n est une variable aléatoire.

- Déterminer la fonction de répartition de Z_n .
- On pose $Z = -\ln(X)$, où X suit aussi la loi exponentielle de paramètre 1.
 - Donner la loi de Z .
 - Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Z .

- EXERCICE 7 -

On considère une suite de variables aléatoires $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0; \alpha]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit : $X_n = \max(U_1, \dots, U_n)$ et $Y_n = n(\alpha - X_n)$.

- On note C_α la variable certaine égale à α . Donner la fonction de répartition de la variable C_α .
 - Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à α .
- Préciser $Y_n(\Omega)$ puis déterminer la fonction de répartition de Y_n .
 - En déduire que (Y_n) converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre $1/\alpha$.
- Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$.
 - Écrire une fonction Python "def SimuY(n) :" qui simule la variable Y_n .
 - La commande "SimuY(100)" renvoie une simulation approchée de quelle loi?
 - On donne $e^{-1} \approx 0,37$.
En utilisant la loi faible des grands nombres, préciser, en le justifiant, laquelle des trois valeurs suivantes affiche le programme ci-dessous : 0,37, 0,63 ou 0,185.

```
1 S = 0
2 N = 10000
3 for k in range(N) :
4     if SimuY(100) <= 1 :
5         S = S + 1
6 print(S/N)
```

- EXERCICE 8 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

- Rappeler l'espérance et la variance de S_n .
- En utilisant le théorème limite central, en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np)$.

- EXERCICE 9 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n^* = \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
- Par quelle loi peut-on approcher la variable aléatoire X_n^* lorsque n est assez grand?
Montrer que pour un tel n suffisamment grand : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n \geq k) \approx \Phi\left(\frac{n-2k}{\sqrt{n}}\right)$.

- EXERCICE 10 -

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$ avec $(X_1, \dots, X_k)$ des variables indépendantes suivant la loi toutes la loi $\mathcal{P}(5)$.

- Rappeler $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$.
- Justifier l'existence d'un unique réel $t_0 > 0$ qui vérifie $\int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,99$.
- Établir que $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(|Y_k - 5k| > t_0 \sqrt{5k}) = 0,01$.

- EXERCICE 11 -

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes la loi $\mathcal{P}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $u_n = e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}$.

1. Donner la loi de S_n , son espérance et sa variance puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(S_n \leq n)$.
2. En appliquant le théorème limite central, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ puis un équivalent de $\sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}$.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 12 -

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \geq \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right).$$

- EXERCICE 13 -

On considère une variable aléatoire discrète Z , d'espérance nulle et de variance σ^2 .

1. Montrer que, pour tout couple $(a, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+ : P(Z \geq a) \leq P((Z+x)^2 \geq (a+x)^2)$.
2. En déduire, en utilisant l'inégalité de Markov, que : $\forall a > 0, \forall x \geq 0, P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.
3. En déduire que : $\forall a > 0, P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.
On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

- EXERCICE 14 -

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On note ϕ sa fonction de répartition. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_n suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1/n)$, indépendante de X . On pose $Z_n = X + Y_n$.

1. Exprimer la fonction de répartition de Y_n à l'aide de Φ .
2. Montrer que Y_n converge en loi vers une loi discrète que l'on précisera.
3. (a) Rappeler la loi de Z_n puis exprimer la fonction de répartition de Z_n à l'aide de Φ .
(b) Montrer que la suite $(X + Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

- EXERCICE 15 -

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ? Donner son espérance et sa variance.
2. (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante K_ε telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}.$$

- (b) En déduire que pour tout réel r vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$.

3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème limite central, que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ admet une limite non-nulle lorsque n tend vers $+\infty$.