

- EXERCICE 1 -

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

1. Justifier que pour tout $\epsilon > 0$, on a : $P\left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon\right) \leq P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right)$.

On a : $\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right) = \left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon\right) \cup \left(X - \frac{1}{\lambda} \leq -\epsilon\right)$ donc par incompatibilité :

$$P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right) = P\left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon\right) + P\left(X - \frac{1}{\lambda} \leq -\epsilon\right)$$

et ainsi : $P\left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon\right) \leq P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right)$.

2. En déduire, en utilisant l'inégalité de BT avec une valeur de ϵ bien choisie, que : $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$.

Comme X admet un moment d'ordre 2 et que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, on a d'après l'inégalité de BT :

$$\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

soit

$$\forall \epsilon > 0, P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$$

ce qui donne avec la question précédente avec $\epsilon = \frac{2}{\lambda}$:

$$P\left(X - \frac{1}{\lambda} \geq \frac{2}{\lambda}\right) \leq P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \frac{2}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2}$$

soit : $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$.

- EXERCICE 2 -

Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire vérifiant $E(X^2) = 2a$ et $V(X^2) = 4a^2$.

On considère n variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

On note S_n la variable aléatoire définie par : $S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S_n .

S_n admet une espérance et une variance comme somme finie de variables aléatoires en admettant et on a :

• $E(S_n) = E\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2\right) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n E(X_k^2) = \frac{1}{2n} 2na = a$ par linéarité de l'espérance et car les X_i suivent tous la même loi que X .

• $V(S_n) = V\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2\right) = \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n V(X_k^2) = \frac{1}{4n^2} 4na^2 = \frac{a^2}{n}$ par indépendance des variables X_k^2 (d'après le lemme des coalitions puisque les X_k sont indépendantes) et car les X_k suivent tous la même loi que X .

2. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n puis en déduire :

$$\forall \epsilon > 0, P(|S_n - a| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{a^2}{n\epsilon^2}$$

Comme S_n admet un moment d'ordre 2 et que $E(S_n) = a$ et $V(S_n) = \frac{a^2}{n}$, on a d'après l'inégalité de BT :

$$\forall \epsilon > 0, P(|S_n - E(S_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\epsilon^2}$$

soit

$$\forall \epsilon > 0, P(|S_n - a| \geq \epsilon) \leq \frac{a^2}{n\epsilon^2}$$

Soit, en considérant l'évènement contraire

$$\forall \epsilon > 0, 1 - P(|S_n - a| < \epsilon) \leq \frac{a^2}{n\epsilon^2}$$

ce qui donne

$$\forall \epsilon > 0, P(|S_n - a| < \epsilon) \geq 1 - \frac{a^2}{n\epsilon^2}$$

Enfin, en remarquant que : $(S_n - a < \epsilon) \subset (|S_n - a| \leq \epsilon)$, on obtient le résultat demandé :

$$\forall \epsilon > 0, P(|S_n - a| \leq \epsilon) \geq P(|S_n - a| < \epsilon) \geq 1 - \frac{a^2}{n\epsilon^2}$$

3. On pose $a = 1$. Déterminer une valeur de n telle que la probabilité que S_n appartienne à l'intervalle $[0.9; 1.1]$ soit supérieure à 0.95.

Pour $a = 1$, on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, P(|S_n - 1| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\epsilon^2}$$

soit

$$\forall \epsilon > 0, P(-\epsilon \leq S_n - 1 \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\epsilon^2}$$

puis en choisissant $\epsilon = 0,1$:

$$\forall \epsilon > 0, P(0,9 \leq S_n \leq 1,1) \geq 1 - \frac{1}{n\epsilon^2}$$

Pour répondre à la question, il faut choisir n tel que : $1 - \frac{1}{n(0,1)^2} \geq 0,95$, ce qui donne après résolution $n \geq 2000$.

- EXERCICE 3 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n^2 x e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une densité de probabilité.

- f_n est clairement positive sur $\mathbb{R}$ (par produit sur $\mathbb{R}_+$).
- f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ (comme constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et par composition et produit sur $\mathbb{R}_+^*$).
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$ CV si et seulement si $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ car f_n est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
Soit $A \geq 0$. On a en notant que l'intégrande est de la forme $u' e^u$:

$$\begin{aligned} \int_0^A f_n(x) dx &= \int_0^A n^2 x e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} dx = \left[-e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} \right]_0^A \\ &= -e^{-\frac{n^2 A^2}{2}} + 1 \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{par composition.} \end{aligned}$$

Ainsi, f_n est une densité de probabilité.

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet pour densité f_n .

(a) Déterminer la fonction de répartition de X_n .

On a clairement $X_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

• Si $t < 0$, on a : $F_{X_n}(t) = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$.

• Si $t \geq 0$, on a d'après le calcul de la question précédente (avec t à la place de A) :

$$F_{X_n}(t) = \int_{-\infty}^t f_n(x) dx = \int_0^t n^2 x e^{-\frac{n^2 x^2}{2}} dx = 1 - e^{-\frac{n^2 t^2}{2}}$$

$$\text{Ainsi, } F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\frac{n^2 t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

(b) **Étudier la convergence en loi de** $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Il s'agit de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t)$. On a :

• Si $t < 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = 0$.

• Si $t > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\frac{n^2 t^2}{2}} = 1$

Posons X la variable certaine égale à 0, de fonction de répartition $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$.

On a alors pour tout $t \neq 0$ (point de continuité de F_X : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$ donc X_n converge en loi vers X la variable certaine égale à 0.

- EXERCICE 4 -

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une variable aléatoire X_n prenant ses valeurs dans

$\llbracket 2; n+1 \rrbracket$ et vérifiant : $\forall k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

1. **Pour tout entier $k \geq 2$, on pose :** $u_k = \frac{k-1}{k!}$. **Vérifier que la suite u définit une loi de probabilité.**

On considère alors une variable aléatoire Z telle que pour tout $k \geq 2$, $P(Z = k) = u_k$.

• Commençons par montrer que : $\sum_{k=2}^{+\infty} u_k = 1$. Soit $N \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^N u_k &= \sum_{k=2}^N \frac{k-1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{N!} \quad \text{Somme télescopique} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

• De plus, $u_k > 0$ (évident) donc $u_k < 1$ (la somme des termes étant égale à 1).

2. (a) **Montrer que** $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

On a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

les k termes du numérateur étant tous équivalents à n .

(b) **Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers Z .**

Il s'agit de montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}$.

Or, on a avec l'équivalent de la question précédente (en remplaçant n par $n+1$) :

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1)^k}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k-1}{k!} = P(Z = k)$$

car $n+1 \sim n$ donc $\frac{(n+1)^k}{n^k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^k} = 1$ par puissance et quotient d'équivalents.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(Z = k)$ donc $(X_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers Z .

- EXERCICE 5 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} a_n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. **Déterminer a_n pour que f_n soit une densité de probabilité.**

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, n\}$ (comme composée sur $]0, n[$ et constante ailleurs).

• Comme $1 - \frac{x}{n} \geq 0$ sur $[0, n]$, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a_n \geq 0$.

• L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$ converge si et seulement si $\int_0^n f_n(x) dx$ converge car f_n est nulle ailleurs. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^n f_n(x) dx &= \int_0^n a_n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \\ &= a_n \left[\frac{-n}{n+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} \right]_0^n \\ &= a_n \frac{n}{n+1} - 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, on a : } \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \iff a_n \frac{n}{n+1} = 1 \iff a_n = \frac{n+1}{n} \geq 0.$$

Finalement, f_n est une densité de probabilité si et seulement si $a_n = \frac{n+1}{n}$.

2. **Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à densité telle que X_n admette f_n pour densité.**

(a) **Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n .**

On a $X_n(\Omega) = [0, n]$ donc :

• $F_n(t) = 0$ si $t < 0$

• $F_n(t) = 1$ si $t > n$

• Pour $t \in [0, n]$, on a :

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \int_{-\infty}^t f_n(x) dx = \frac{n+1}{n} \int_0^t \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx \\ &= \frac{n+1}{n} \left[\frac{-n}{n+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} \right]_0^t \\ &= \left[-\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} \right]_0^t \\ &= 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, on a : } F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} & \text{si } t \in [0, n] \\ 1 & \text{si } t > n \end{cases}$$

(b) **Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z que l'on déterminera.**

Il s'agit de déterminer la limite de $F_{X_n}(x) = F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

• Pour $x < 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$

• Pour $x > 0$.

Lorsque n est assez grand (n tend vers $+\infty$), on a $0 \leq x \leq n$ donc $F_{X_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}$.

Or, on a :

$$\star \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$$

$$\star (n+1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \sim (n+1) \left(-\frac{x}{n}\right) = -x \quad \text{par produit car } \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \sim -\frac{x}{n} \text{ car } \frac{x}{n} \rightarrow 0.$$

$$\star \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x \quad \text{puis par composition } \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left((n+1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) = e^{-x}.$$

$$\text{On a donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1} = 1 - e^{-x}.$$

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = F_Z(x)$ avec $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Il est inutile de chercher la limite pour $x = 0$ car F_Z est continue sur $\mathbb{R}^*$.
Finalement, la suite (X_n) converge en loi vers la variable $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

- EXERCICE 6 -

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $Z_n = \sup(X_1, \dots, X_n) - \ln(n)$, et on admet que Z_n est une variable aléatoire.

1. Déterminer la fonction de répartition de Z_n .

Notons $M_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$.

On a clairement $S_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$ (car $X_i(\Omega) = \mathbb{R}_+$ pour tout i) donc $Z_n(\Omega) = [-\ln(n), +\infty[$. Ainsi :

- Si $t < -\ln(n)$, on a : $F_{Z_n}(t) = 0$.
- Si $t \geq -\ln(n)$, on a :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(t) &= P(Z_n \leq t) \\ &= P(\sup(X_1, \dots, X_n) \leq t + \ln(n)) \\ &= P(X_1 \leq t + \ln(n) \cap \dots \cap X_n \leq t + \ln(n)) \\ &= P(X_1 \leq t + \ln(n))^n \quad \text{par indépendance et car les } X_i \text{ suivent la même loi} \\ &= \left(1 - e^{-t - \ln(n)}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{e^{-t}}{e^{\ln(n)}}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -\ln(n) \\ \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n & \text{si } t \geq -\ln(n) \end{cases}.$$

2. On pose $Z = -\ln(X)$, où X suit aussi la loi exponentielle de paramètre 1.

(a) Donner la loi de Z .

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, et que la fonction $\ln$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, on a $Z(\Omega) = \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Z \leq t) = P(-\ln(X) \leq t) \\ &= P(\ln(X) \geq -t) \\ &= P(X \geq e^{-t}) \quad \text{car la fonction } \exp \text{ est croissante} \\ &= 1 - F_X(e^{-t}) \quad \text{car } X \text{ est une variable à densité} \\ &= 1 - \left(1 - e^{-e^{-t}}\right) \\ &= e^{-e^{-t}} \end{aligned}$$

(b) Montrer que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Z .

Il s'agit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(t) = F_Z(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car F_Z est continue sur $\mathbb{R}$).

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand (n tend vers $+\infty$), on a $t \leq -\ln(n)$.

En effet, on a : $t \leq -\ln(n) \iff n \geq e^{-t}$. Ainsi, on a pour n assez grand : $F_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n$. Or, on a :

- $F_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)\right)$
- $n \ln\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right) \sim n \left(-\frac{e^{-t}}{n}\right) = -e^{-t}$ par produit car $\frac{e^{-t}}{n} \rightarrow 0$.
- Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right) = -e^{-t}$ puis par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Z_n}(t) = e^{-e^{-t}} = F_Z(t)$.

Ainsi, $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Z .

- EXERCICE 7 -

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on considère une suite de variables aléatoires $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0; \alpha]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit : $X_n = \max(U_1, \dots, U_n)$ et $Y_n = n(\alpha - X_n)$.

1. (a) On note C_α la variable certaine égale à α . Donner la fonction de répartition de la variable C_α .

$$\text{On a : } C_\alpha(\Omega) = \{\alpha\}, P(C_\alpha = \alpha) = 1 \text{ et } F_{C_\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}.$$

(b) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à α .

$$\text{Pour tout } i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{ on a : } F_{U_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}.$$

Commençons par remarquer que $X_n(\Omega) = [0; \alpha]$.

On applique la méthode pour la loi du "max". On a pour tout réel x :

$$(\max(U_1, \dots, U_n) \leq x) = ((U_1 \leq x) \cap \dots \cap (U_n \leq x))$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} P(X_n \leq x) &= P(\max(U_1, \dots, U_n) \leq x) = P((U_1 \leq x) \cap \dots \cap (U_n \leq x)) \\ &= P(U_1 \leq x) \times \dots \times P(U_n \leq x) \quad \text{par indépendance} \\ &= P(U_1 \leq x)^n \quad \text{car les variables suivent la même loi} \\ &= (F_{U_1}(x))^n \\ F_{X_n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que $F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_{C_\alpha}(x)$ pour tout x où F_{C_α} est continue donc sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$.

- Pour $x < 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = F_{C_\alpha}(x)$
- Pour $x < \alpha$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n = 0 = F_{C_\alpha}(x)$ car $\frac{x}{\alpha} < 1$.
- Pour $x > \alpha$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 = F_{C_\alpha}(x)$.

Finalement, la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à α .

2. (a) Préciser $Y_n(\Omega)$ puis déterminer la fonction de répartition de Y_n .

On a : $X_n(\Omega) = [0; \alpha]$ donc $(\alpha - X_n)(\Omega) = [0; \alpha]$ et $Y_n(\Omega) = n(\alpha - X_n)(\Omega) = [0; n\alpha]$.

On a alors :

- $F_{Y_n}(x) = 0$ pour $x < 0$.
- $F_{Y_n}(x) = 1$ pour $x \geq n\alpha$.
- Pour tout $x \in [0; n\alpha]$, on a :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= P(Y_n \leq x) = P(n(\alpha - X_n) \leq x) \\ &= P(\alpha - X_n \leq \frac{x}{n}) \\ &= P(X_n \geq \alpha - \frac{x}{n}) \\ &= 1 - P(X_n < \alpha - \frac{x}{n}) \\ &= 1 - F_{X_n}(\alpha - \frac{x}{n}) \quad \text{car } X_n \text{ est uen variable à densité} \end{aligned}$$

Comme $0 \leq x \leq n\alpha$, on a donc $0 \leq \alpha - \frac{x}{n} \leq \alpha$ et donc

$$F_{Y_n}(x) = 1 - F_{X_n}(\alpha - \frac{x}{n}) = 1 - \left(\frac{\alpha - \frac{x}{n}}{\alpha}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right)^n$$

(b) **En déduire que (Y_n) converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre $1/\alpha$.**

Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1/\alpha)$. On a :
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Il s'agit de montrer que $F_{Y_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F_Z(x)$ pour tout x où F_Z est continue donc sur $\mathbb{R}^*$.

• Pour $x < 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = F_Z(x)$

• Pour $x > 0$.

Lorsque n est assez grand (n tend vers $+\infty$), on a $0 \leq x \leq n\alpha$ donc $F_{Y_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right)^n$.

Or, on a :

★ $\left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right)\right)$

★ $n \ln\left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right) \sim n\left(-\frac{x}{n\alpha}\right) = -\frac{x}{\alpha}$ par produit car $\ln\left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right) \sim -\frac{x}{n\alpha}$ car $\frac{x}{n\alpha} \rightarrow 0$.

★ Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right) = -\frac{x}{\alpha}$ puis par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right)\right) = e^{-\frac{x}{\alpha}}$.

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n\alpha}\right)^n = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}} = F_Z(x)$.

Finalement, la suite (Y_n) converge en loi vers la variable $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1/\alpha)$.

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$.

(a) **  crire une fonction Python "def SimuY(n) :" qui simule la variable Y_n .**

On commence par simuler les variables $U_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ avec la commande `rand()` (car $\alpha = 1$) puis la variable X_n avec la commande `max` et enfin Y_n . On a :

```
1 def SimuY(n) :
2     U = []
3     for i in range(n) :
4         U.append(rd.rand()) \ \ Simule un vecteur de n v.a de loi uniforme
5     Xn = np.max(U)
6     Yn = n*(1-Xn)
7     return Yn
```

(b) **La commande "SimuY(100)" renvoie une simulation appro  ch  e de quelle loi ?**

La commande **SimuY(100)** prend la valeur 100 pour n . On peut considérer que n est assez grand donc **SimuY(100)** permet de simuler la variable $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1/\alpha)$ car Y_n converge en loi vers Z .

(c) **On donne $e^{-1} \approx 0,37$.**

En utilisant la loi faible des grands nombres, préciser, en le justifiant, laquelle des trois valeurs suivantes affiche le programme ci-dessous : 0,37, 0,63 ou 0,185.

```
1 S = 0
2 N = 10000
3 for k in range(N) :
4     if SimuY(100) <= 1 :
5         S = S + 1
6 print(S/N)
```

Dans le programme, la ligne **if SimuY(100) <= 1** teste si Z est inférieur à 1.

La variable S compte donc le nombre de fois ou $Z \leq 1$ lors des **N = 10000** expériences.

La commande **print(S/N)** affiche donc la fréquence de l'  v  nement $Z \leq 1$.

La loi faible des grands nombres nous dit que cette fréquence a une très forte probabilité d'être proche de la probabilité $P(Z \leq 1)$.

Donc : $S/N \approx P(Z \leq 1) = F_Z(1) = 1 - e^{-1} \approx 1 - 0,37 = 0,63$.

- EXERCICE 8 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

1. **Rappeler l'espérance et la variance de S_n .**

On a : $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = npq$.

2. **En utilisant le théorème limite central, en déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np)$.**

Comme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ indépendante et de même loi (et de variance non nulle), on sait d'après le TLC que S_n^* converge en loi vers N avec $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(S_n \leq np) &= P(S_n - np \leq 0) \\ &= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq 0\right) \\ &= P(S_n^* \leq 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(0) = 1/2 \quad \text{d'après le TLC} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np) = 1/2$.

- EXERCICE 9 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. **Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n^* = \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.**

Comme X_n suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, on peut écrire X_n comme une somme de variables de Bernoulli indépen-

dantes : $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ avec pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ indépendantes.

D'après le théorème limite central, la suite $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Or, on a : $X_n^* = \frac{X_n - E(X_n)}{\sqrt{V(X_n)}} = \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}$ d'où le résultat.

2. **Par quelle loi peut-on approcher la variable aléatoire X_n^* lorsque n est assez grand ?**

Montrer que pour un tel n suffisamment grand : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n \geq k) \approx \Phi\left(\frac{n - 2k}{\sqrt{n}}\right)$.

D'après la question précédente, on peut approcher X_n^* par une loi normale pour n assez grand. On a alors :

$$\begin{aligned} P(X_n \geq k) &= P\left(\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \geq \frac{2k - n}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(X_n^* \geq \frac{2k - n}{\sqrt{n}}\right) \\ &\approx P\left(N \geq \frac{2k - n}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{d'après le TLC} \\ &\approx 1 - P\left(N \leq \frac{2k - n}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{car variable à densité} \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{2k - n}{\sqrt{n}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{n - 2k}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{car } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

- EXERCICE 10 -

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$ avec $(X_1, \dots, X_k)$ des variables indépendantes suivant la loi toutes la loi $\mathcal{P}(5)$.

1. **Rappeler $E(Y_k)$ et $V(Y_k)$.**

Par stabilité des lois de Poisson indépendantes, on peut dire que Y_k suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(5k)$.

On a alors : $E(Y_k) = 5k$ et $V(Y_k) = 5k$.

2. **Justifier l'existence d'un unique réel $t_0 > 0$ qui vérifie $\int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,99$.**

Il s'agit de montrer qu'il existe un unique réel $t_0 > 0$ tel que : $\Phi(t_0) = 0,99$. Utilisons le TBM.

- Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car φ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car φ y est strictement positive.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$

Ainsi, Φ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ vers $]0, 1[$.

Comme $0,99 \in]0, 1[$, il existe un unique réel t_0 tel que : $\Phi(t_0) = 0,99$.

De plus $\Phi(0) = 1/2 < 0,99$ donc $t_0 > 0$.

3. **Établir que** $\lim_{k \rightarrow +\infty} P(Y_k - 5k > t_0 \sqrt{5k}) = 0,01$.

$$\begin{aligned} P(Y_k - 5k > t_0 \sqrt{5k}) &= P\left(\frac{Y_k - 5k}{\sqrt{5k}} > t_0\right) \\ &= P(Y_k^* > t_0) \\ &= 1 - P(Y_k^* \leq t_0) \\ &\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1 - \Phi(t_0) \quad \text{d'après le TLC} \\ &= 1 - 0,99 = 0,01 \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

- EXERCICE 11 -

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépen-

dantes, et suivant toutes la loi $\mathcal{P}(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $u_n = e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}$.

1. Donner la loi de S_n , son espérance et sa variance puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(S_n \leq n)$.

- Par stabilité des lois de Poisson indépendantes, on peut dire que S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$.
On a alors : $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$.

- On a : $u_n = e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} = \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} e^{-n} = \sum_{i=0}^n P(S_n = i) = P(S_n \leq n)$.

2. En appliquant le théorème limite central, en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ puis un équivalent de $\sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}$.

Comme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ indépendante et de même loi (et de variance non nulle), on sait d'après

le TLC que S_n^* converge en loi vers N avec $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_n &= P(S_n \leq n) = P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \\ &= P(S_n^* \leq 0) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi(0) = 1/2 \quad \text{d'après le TLC} \end{aligned}$$

Pour obtenir un équivalent, on va faire apparaître un quotient qui tend vers 1. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1/2 \quad \text{soit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} = 1/2 \quad \text{soit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}}{\frac{e^n}{2}} = 1.$$

Ainsi : $\sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} \sim \frac{e^n}{2}$.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 12 -

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \geq \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right).$$

- EXERCICE 13 -

On considère une variable aléatoire discrète Z , d'espérance nulle et de variance σ^2 .

1. Montrer que, pour tout couple $(a, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$: $P(Z \geq a) \leq P((Z+x)^2 \geq (a+x)^2)$.

2. En déduire, en utilisant l'inégalité de Markov, que : $\forall a > 0, \forall x \geq 0, P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.

3. En déduire que : $\forall a > 0, P(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

- EXERCICE 14 -

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On note ϕ sa fonction de répartition.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_n suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1/n)$, indépendante de X .

On pose $Z_n = X + Y_n$.

- Exprimer la fonction de répartition de Y_n à l'aide de Φ .
- Montrer que Y_n converge en loi vers une loi discrète que l'on précisera.
- (a) Rappeler la loi de Z_n puis exprimer la fonction de répartition de Z_n à l'aide de Φ .
(b) Montrer que la suite $(X + Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

- EXERCICE 15 -

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabi-

lisé, et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- Quelle est la loi suivie par S_n ? Donner son espérance et sa variance.
- (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante K_ε telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}.$$

- (b) En déduire que pour tout réel r vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$.

3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème limite central, que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ admet une limite non-nulle lorsque n tend vers $+\infty$.