

- EXERCICE 1 -

Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués.

- $\frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}}$ en 0^+ et en $+\infty$.
- $\ln(e^{-x} + x^{-2})$ en $+\infty$.
- $\frac{(1 - e^x)^2}{x \ln(1 + x)}$ en 0.
- $\frac{xe^x + 1}{e^x + 1}$ en $+\infty$, et en $-\infty$.
- $e^x - xe^{1/x}$ en 0^+ , en 0^- et en $+\infty$.
- $\frac{x \ln(x^2) - \ln x}{\sqrt{x+1}}$ en 0^+ .
- $\ln(1 + \sqrt{x}) - x^2$ en $+\infty$.
- $x^{\frac{1}{x}}$ en 0^+ et en $+\infty$.
- xe^{-x^2} en $+\infty$.
- $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ en 0.
- $(1+x)^{1/x}$ en 0.
- $\frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)}$ en 0 et en $+\infty$.

- EXERCICE 2 -

À l'aide des développements limités, déterminer un équivalent puis calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués.

- $\frac{\ln(1+x) - x}{2x^2}$ en 0.
- $\frac{e^x - xe^x - 1}{2x^2}$ en 0.
- $\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0.
- $\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$ en 0.
- $\frac{1}{e^{-x} - 1} - \frac{1}{x}$ en 0.
- $\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x}$ en 0.

- EXERCICE 3 -

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α , un équivalent en $+\infty$ de $x^\alpha \ln(x+1) - x^\alpha \ln(x)$ puis déterminer la limite de cette quantité en $+\infty$.
- Montrer qu'à un voisinage de $+\infty$, on a : $xe^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'à un voisinage de $+\infty$, on a : $\frac{(\ln(1+x))^n}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.
- Montrer que : $\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x \ln(x)$.

- EXERCICE 4 -

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[\setminus \{0\}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

- Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 puis en déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.
- En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0?
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

- EXERCICE 5 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x) - e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2}$ pour tout $x \neq 0$.
- Montrer que pour tout réel x , on a : $e^{-x} \geq 1 - x$.
- En déduire le tableau de variations de f , limites comprises puis tracer une allure de sa courbe.
- La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

- EXERCICE 6 -

- Déterminer un équivalent puis la limite des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}; \quad v_n = \sqrt{n+1} [\ln(n+1) - \ln(n)]; \quad w_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

- Déterminer la limite de : $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- EXERCICE 7 -

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On admet le résultat suivant (montré dans l'exercice 8) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln(n) + 1$.

- Déduire du résultat admis un équivalent de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Que dire de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$?
- On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $d_n = v_n - \ln(n)$.
Écrire une fonction Python qui calcule d_n pour n donné en paramètre.
On peut montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ converge vers une limite appelée constante d'Euler.*

Pour aller plus loin...**- EXERCICE 8 -**

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.
- En sommant astucieusement les deux inégalités précédentes (séparément), en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln(n) + 1.$$

- En déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- EXERCICE 9 -

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour $n \geq 1$ par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

- En utilisant une quantité conjuguée, montrer que : $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- On pose désormais pour tout $n \geq 1$: $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par -2 .
- En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge puis déterminer un équivalent simple de S_n .

- EXERCICE 10 -

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$.

On note Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1 : $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.

- Rappeler la loi de X_n ainsi que celle de Y (univers et formule).
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé : $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
- En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!} = P(Y = k)$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.
On dit que la de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ converge en loi que Y .*