

- EXERCICE 1 -**Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués.**

1. • En
- 0^+
- : Opérations classiques sur les limites.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + x - 1 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x + e^{-x} = 1 \quad \text{par somme}$$

$$\text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}} = -\infty \quad \text{par quotient.}$$

- En
- $+\infty$
- : Par équivalents, l'élimination des termes négligeables donne :

$$\ln x + x - 1 \underset{+\infty}{\sim} x \quad \text{et} \quad x + e^{-x} \underset{+\infty}{\sim} x \quad \text{donc} \quad \frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{par quotient}$$

$$\text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x - 1}{x + e^{-x}} = 1.$$

2. • Opérations classiques sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + x^{-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \frac{1}{x^2} = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + x^{-2}) = -\infty \quad \text{par composition.}$$

3. • Par opérations sur les équivalents :

$$\text{D'une part, } e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad \text{donc} \quad 1 - e^x \underset{0}{\sim} -x \quad \text{en multipliant par } -1.$$

$$\text{D'autre part, } \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \quad \text{donc} \quad x \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x^2$$

$$\text{donc par quotient : } \frac{(1-e^x)^2}{x \ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{(-x)^2}{x^2} = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-e^x)^2}{x \ln(1+x)} = 1.$$

4. • En
- $+\infty$
- : Par équivalents, l'élimination des termes négligeables donne :

$$\frac{x e^x + 1}{e^x + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x e^x}{e^x} = x \quad \text{par quotient donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^x + 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

- En
- $-\infty$
- : Opérations classiques sur les limites et croissances comparées donnent :

$$\text{D'une part, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x + 1 = 1 \quad \text{par CC} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x e^x + 1}{e^x + 1} = 1 \quad \text{par quotient.}$$

5. • En
- 0^+
- :

$$\text{D'une part, } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \quad \text{et d'autre part} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \quad \text{par CC}$$

$$\text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - x e^{1/x} = -\infty.$$

- En
- 0^-
- :

$$\text{D'une part, } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \quad \text{et d'autre part} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{t} = 0 \quad \text{par quotient}$$

$$\text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - x e^{1/x} = 1.$$

- En
- $+\infty$
- :

$$e^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} 1 \quad \text{donc} \quad x e^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} x \quad \text{mais on ne peut pas écrire} \quad e^x - x e^{1/x} \underset{+\infty}{\sim} e^x - x \quad (\text{somme d'équivalents interdite}).$$

$$\text{On factorise alors par } e^x, \text{ ce qui donne : } e^x - x e^{1/x} = e^x \left(1 - \frac{x e^{1/x}}{e^x} \right).$$

$$\text{On alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{par CC} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{1/x}}{e^x} = 0. \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x e^{1/x}}{e^x} = 1.$$

$$\text{Finalement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x e^{1/x}}{e^x} \right) = +\infty \quad \text{par produit.}$$

6. Remarquer que
- $\frac{x \ln(x^2) - \ln x}{\sqrt{x+1}} = \frac{2x \ln(x) - \ln x}{\sqrt{x+1}}$
- puis

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x) = 0 \quad \text{par CC} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x) - \ln x = +\infty \quad \text{par somme.}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln(x) - \ln x}{\sqrt{x+1}} = +\infty \quad \text{par quotient.}$$

7. Intuitivement,
- $\ln(1 + \sqrt{x})$
- est négligeable devant
- x^2
- en
- $+\infty$
- donc
- $\ln(1 + \sqrt{x}) - x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x^2$
- .

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{x}) - x^2 = -\infty.$$

Plus rigoureusement, on est obligé de factoriser par le terme dominant :

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sqrt{x}) - x^2 &= \ln \left(\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) \right) - x^2 = \ln(\sqrt{x}) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - x^2 \\ &= \ln(x^{1/2}) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - x^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln(x) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - x^2 \\ &\underset{+\infty}{\sim} -x^2 \end{aligned}$$

en éliminant les termes négligeables.

8. Remarquer que
- $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$
- puis on obtient.

$$\bullet \text{ En } 0^+ : \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \quad \text{par quotient} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0 \quad \text{par composition.}$$

$$\bullet \text{ En } +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{par CC} \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1 \quad \text{par composition.}$$

- 9.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1/2} e^{-t} = 0$
- par CC.

10. Par quotient d'équivalent (avec
- $(1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax$
-) :

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{(1+x)^{1/2} - 1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

11. Remarquer que :
- $(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$
- .

On ne peut pas utiliser les équivalents car on ne pourra pas composer par exp.

On utilise les limites. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{donc par composition de limites (la fonction } \exp \text{ est continue), on trouve :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e.$$

12. • En
- 0^+
- :
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)} = 0$
- par quotient (
- $\frac{0}{-\infty}$
-)

- En
- $+\infty$
- : On ne peut pas écrire
- $\ln(1+x^3) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x^3)$
- car on ne peut pas composer par les équivalents. On factorise par le terme dominant.

$$\frac{\ln(1+x^3)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x^3) + \ln(1 + \frac{1}{x^3})}{\ln(x)} = \frac{3 \ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x^3})}{\ln(x)} = 3 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^3})}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3$$

- EXERCICE 2 -

A l'aide des développements limités, déterminer un équivalent puis calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués.

1. On ne peut pas utiliser les équivalents à cause de la différence au numérateur. On utilise les DL. On obtient :

$$\frac{\ln(1+x) - x}{2x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{2x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{2x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

2. On a au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 &= \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2} - 1 \\ &= \frac{2 + x^2 + o(x^2)}{2} - 1 \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = 0 \text{ (limite qu'on peut bien sûr obtenir sans les DL).}$$

3. On ne peut pas additionner les équivalents donc on utilise les DL. On a au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\begin{aligned} e^x - xe^x - 1 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1 \\ &= x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - x^2 - \frac{x^3}{2} - o(x^3) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{car} \quad x^3 \underset{0}{=} o(x^2) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } e^x - xe^x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

$$\text{On a donc par quotient d'équivalents : } \frac{e^x - xe^x - 1}{2x^2} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2/2}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - xe^x - 1}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

4. Mettre au même dénominateur puis utiliser les DL au numérateur à cause de la somme.

$$\frac{1}{e^{-x} - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x - e^{-x} + 1}{x(e^{-x} - 1)}$$

Au numérateur, le DL $e^{-x} = 1 - x + o(x)$, donne $e^{-x} = 1 - x + o(x)$ et donc : $x - e^{-x} + 1 = 2x + o(x) \underset{0}{\sim} 2x$.

Au dénominateur, l'équivalent $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$ donne $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$ et donc : $x(e^{-x} - 1) \underset{0}{\sim} -x^2$.

Ainsi, par quotient, on a :

$$\frac{1}{e^{-x} - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x - e^{-x} + 1}{x(e^{-x} - 1)} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{-x^2} = \frac{-2}{x}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-x} - 1} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^{-x} - 1} - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x} = +\infty.$$

5. Mettre au même dénominateur puis utiliser les DL au numérateur à cause de la somme.

On a :

$$\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

Pour le numérateur, on obtient avec de DL de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$\begin{aligned} x - (1+x)\ln(1+x) &= x - (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= x - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x^2 + \underbrace{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}_{=o(x^2)} \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &\underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Au dénominateur, on a : $x^2(1+x) \underset{0}{\sim} x^2$ par produit (car $1+x \underset{0}{\sim} 1$) ce qui donne par quotient d'équivalent

$$\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

6. Utiliser les DL au numérateur à cause de la somme.

On obtient :

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = (1+x^2)^{1/2} - (1-x^2)^{1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} = x^2 + o(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$$

$$\text{donc par quotient : } \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \text{ puis } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x} = 0.$$

On peut éviter les DL en pensant à multiplier haut et bas par la quantité conjuguée $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$.

- EXERCICE 3 -

1. **Soit** ($\alpha \in \mathbb{R}$). **Déterminer, en fonction de α , un équivalent en $+\infty$ de $x^\alpha \ln(x+1) - x^\alpha \ln(x)$ puis déterminer la limite de cette quantité en $+\infty$.**

Remarquer que : $x^\alpha \ln(x+1) - x^\alpha \ln(x) = x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{+\infty} 0$, on a : $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc par produit d'équivalents : $x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x^\alpha \frac{1}{x} = x^{\alpha-1}$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

2. **Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $xe^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.**

Il s'agit de montrer que la limite du quotient vaut 0.

Or, $\frac{xe^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = x^3 e^{-x^2}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2} e^{-t} = 0$ par CC (en posant $t = x^2$, ce qui donne $x^3 = t^{3/2}$)

$$\text{donc } xe^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

3. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $\frac{(\ln(1+x))^n}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.**

Il s'agit de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2} (\ln(1+x))^n}{1+x^2} = 0$.

Intuitivement, on a :

$$x^{3/2} \frac{(\ln(1+x))^n}{1+x^2} \underset{0}{\sim} x^{3/2} \frac{(\ln(1+x))^n}{x^2} = \frac{(\ln(1+x))^n}{x^{1/2}} \xrightarrow{+\infty} 0 \quad \text{par CC (mais pas très rigoureux)}$$

Plus rigoureusement, il faudrait continuer et écrire :

$$x^{3/2} \frac{(\ln(1+x))^n}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} x^{3/2} \frac{(\ln(1+x))^n}{x^2} = \frac{(\ln(1+x))^n}{x^{1/2}} \sim \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^{1/2}}$$

puis poser $t = 1 + x$ pour obtenir : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^{1/2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^{1/2}} = 0$ par CC.

4. **Montrer que :** $\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) - x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x \ln(x)$.

Commençons par remarquer que

$$\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) = \exp\left(2 \ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) = \exp(\ln(x^2)) \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2 \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right) - x^2 &= x^2 \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - x^2 \\ &= x^2 \underbrace{\left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right)}_{\underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} -x \ln(x) \quad \text{par produit d'équivalents} \end{aligned}$$

En effet, on a : $\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(x)}{x}$ car de la forme $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$ par C.C.

- EXERCICE 4 -

Soit f la fonction définie sur $[-1; +\infty[\setminus \{0\}$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

1. **Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 puis en déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.**

On a d'après formule du DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

ce qui donne :

$$f(x) \underset{0}{=} \frac{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) - 1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + o(x)$$

2. **En déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?**

A l'aide du DL précédent, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + o(x) = \frac{1}{2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$ est finie, f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

On calcule le taux d'accroissement en 0 à l'aide du DL trouvé à la question 1 et de $f(0) = \frac{1}{2}$.

On obtient :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{8} + o(x) - \frac{1}{2}}{x} = -\frac{1}{8} + o(1) \xrightarrow{0} -\frac{1}{8}$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{8}$.

3. **Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.**

Le DL d'ordre 1 trouvé en Q 1 fournit l'équation de la tangente qui est donc : $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}$.

Sinon, avec les questions précédentes on a directement : $y = f(0) + f'(0)x = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}$.

- EXERCICE 5 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. **Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.**

• f est continue sur $\mathbb{R}^*$ par produit et quotient de dénominateur non nul (car $x \neq 0$ donc $1 - e^{-x} \neq 0$).

• Continuité en 0 :

On a : $e^u - 1 \underset{0}{\sim} u$ donc $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$ et donc $1 - e^{-x} \underset{0}{\sim} x$. On a donc par quotient d'équivalents :

$$\frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \underset{0}{\sim} \frac{xe^{-x}}{x} = e^{-x}$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. **Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.**

Il faut calculer le taux d'accroissement en 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{xe^{-x} - 1 + e^{-x}}{x(1 - e^{-x})}$$

• On utilise les DL pour le numérateur à cause de la somme :

$$\begin{aligned} xe^{-x} - 1 + e^{-x} &= x(1 - x + x^2/2 + o(x^2)) - 1 + 1 - x + x^2/2 + o(x^2) \\ &= -x^2/2 + o(x^2) \quad \text{en simplifiant et en négligeant les termes en } x^3 \\ &\underset{0}{\sim} -x^2/2 \end{aligned}$$

• On utilise les équivalents pour le dénominateur : $x(1 - e^{-x}) \underset{0}{\sim} x^2$.

ce qui donne par quotient : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

3. **Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x) - e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2}$ pour tout $x \neq 0$.**

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et quotient de dénominateur non nul et :

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x) - e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}(1-x-e^{-x})}{(1-e^{-x})^2}$$

On peut aussi remarquer que $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ ce qui simplifie les calculs.

4. **Montrer que pour tout réel x , on a : $e^{-x} \geq 1 - x$.**

• Méthode 1 : Étudier les variations de la fonction $x \mapsto e^{-x} - 1 + x$ et en déduire qu'elle est positive (à faire).

• Méthode 2 : Utiliser un argument de convexité de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe donc sa courbe est au dessus de ses tangentes, en particulier sa tangente en 0 d'équation $y = 1 - x$. Ainsi, on a : $e^{-x} \geq 1 - x$.

5. **Dresser le tableau de variations de f , limites comprises puis tracer une allure de sa courbe représentative.**

Comme $f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x-e^{-x})}{(1-e^{-x})^2}$ est du signe de $1 - x - e^{-x}$, on a d'après la question précédente :

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x-e^{-x})}{(1-e^{-x})^2} < 0$$

donc f strictement décroissante.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-te^t}{1 - e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^t}{e^t - 1} = +\infty$ car $e^t - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^t$ donc $\frac{te^t}{e^t - 1} \underset{+\infty}{\sim} t$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par quotient car $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0

6. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, la fonction f' est continue en tout point x de $\mathbb{R}^*$. Etudions la continuité de f' en 0 en calculant $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

On a : $f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x) - e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2}$.

- On utilise les DL pour le numérateur à cause de la somme :

$$\begin{aligned} e^{-x}(1-x) - e^{-2x} &= (1-x+x^2/2+o(x^2))(1-x) - (1-2x+(-2x)^2/2+o(x^2)) \\ &= 1-x+x^2/2+o(x^2) - x+x^2+o(x^2) - 1+2x-2x^2+o(x^2) \\ &= -x^2/2+o(x^2) \quad \text{en simplifiant et en négligeant les termes en } x^3 \\ &\underset{0}{\sim} -x^2/2 \end{aligned}$$

- On utilise les équivalents pour le dénominateur : $(1-e^{-x})^2 \underset{0}{\sim} x^2$.

ce qui donne par quotient : $f'(x) \underset{0}{\sim} \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$ donc f' est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- EXERCICE 6 -

1. Déterminer un équivalent puis la limite des suites suivantes :

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}; \quad v_n = \sqrt{n+1} [\ln(n+1) - \ln(n)]; \quad w_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

- $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$.

- $v_n = \sqrt{n+1} [\ln(n+1) - \ln(n)] = \sqrt{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Or, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et $\sqrt{n+1} = (n+1)^{1/2} \sim n^{1/2}$, ce qui donne par produit :

$$v_n \sim n^{1/2} \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

- $w_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{1}{2}$.

2. Déterminer la limite de : $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Remarque : une limite du type $1^{+\infty}$ est une FI.

Il faut ici transformer la puissance en exponentielle ($a^b = \exp(b \ln(a))$).

On écrit donc : $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

Or, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc : $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n \frac{1}{n} = 1$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et par composition de limites par la fonction $\exp$ qui est continue :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e^1 = e$$

- EXERCICE 7 -

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

On admet le résultat suivant (montré dans l'exercice ??) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln(n) + 1$.

1. Dédire du résultat admis un équivalent de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Les termes extrêmes de l'inégalité sont tous deux équivalents à $\ln(n)$ ce qui donne envie d'appliquer le théorème des gendarmes. Mais attention, il n'existe pas de théorème des gendarmes pour les équivalents.

On conjecture donc que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et on va donc devoir passer par les limites pour le montrer.

Il faut calculer la limite du quotient $\frac{v_n}{\ln(n)}$.

On divise par $\ln(n) > 0$ dans les inégalités précédentes, ce qui donne :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln(n) + 1 \iff 1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{v_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

puis comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n \ln(n)} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$ le théorème des gendarmes (le vrai) donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\ln(n)} = 1 \quad \text{et donc} \quad v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

2. Que dire de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$?

On vient de voir que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$.

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série diverge, ce qui signifie que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge. Il s'agit de

la série harmonique.

3. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $d_n = v_n - \ln(n)$.

Écrire une fonction Python qui calcule d_n pour n donné en paramètre.

On peut montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite appelée constante d'Euler.

```

1 from math import log # on importe la fonction log
2
3 def suite_d(n) :
4     v = 0
5     for k in range(1, n+1) : # calcul de la somme
6         v = v + 1/k # on ajoute le terme 1/k à chaque passage
7     return v - log(n)

```

- EXERCICE 8 -

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. En utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur l'intervalle $[k; k+1]$, on a $\forall t \in [k; k+1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} &\leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt &\leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\ \Rightarrow \frac{1}{k+1} \underbrace{\int_k^{k+1} 1 dt}_{=1} &\leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} 1 dt \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

2. En sommant astucieusement les deux inégalités précédentes (séparément), en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln(n) + 1.$$

- Obtention de l'inégalité de droite.

On peut faire apparaître v_n à gauche en sommant l'inégalité de gauche mais il faut être vigilant aux bornes. On ne peut pas démarrer à 0 (car la relation n'est vraie que pour $k \in \mathbb{N}^*$) et il faut s'arrêter à $n-1$ (pour tenir compte du changement d'indice). On somme donc pour k variant de 1 à $n-1$ et on ajoutera le terme manquant. On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} &\leq \underbrace{\int_1^n \frac{1}{t} dt}_{=\ln(n)} \quad \text{changement d'indice } i = k+1 \text{ et avec la relation de Chasles} \\ \Rightarrow v_n = 1 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} &\leq \ln(n) + 1 \quad \text{en ajoutant 1 de chaque côté pour faire apparaître } v_n \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \ln(n) + 1$.

- Obtention de l'inégalité de gauche.

On peut faire apparaître v_n à droite en sommant l'inégalité de droite mais il faut être vigilant aux bornes. On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \underbrace{\int_1^n \frac{1}{t} dt}_{=\ln(n)} &\leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}_{=v_n - \frac{1}{n}} \quad \text{avec la relation de Chasles} \\ \Rightarrow \ln(n) + \frac{1}{n} &\leq v_n \quad \text{en ajoutant } \frac{1}{n} \text{ de chaque côté pour faire apparaître } v_n \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq v_n$.

Youpi! On peut bomber le torse fièrement et conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n) + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln(n) + 1$.

3. En déduire un équivalent de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Les termes extrêmes de l'inégalité sont tous deux équivalents à $\ln(n)$ ce qui donne envie d'appliquer le théorème des gendarmes. Mais attention, il n'existe pas de théorème des gendarmes pour les équivalents. On conjecture donc que $v_n \sim_{+\infty} \ln(n)$ et on va donc devoir passer par les limites pour le montrer.

Il faut calculer la limite du quotient $\frac{v_n}{\ln(n)}$.

On divise par $\ln(n) > 0$ dans les inégalités précédentes, ce qui donne :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln(n) + 1 \iff 1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{v_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

puis comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n \ln(n)} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$ le théorème des gendarmes (le vrai) donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\ln(n)} = 1 \quad \text{et donc} \quad v_n \sim_{+\infty} \ln(n).$$

- EXERCICE 9 -

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour $n \geq 1$ par : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. En utilisant une quantité conjuguée, montrer que : $\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On a, en multipliant haut et bas par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

En remarquant que :

$$2\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1}$$

on obtient, en passant à l'inverse :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ce qui donne le résultat.

2. À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

En sommant la partie droite de l'inégalité précédente (pour faire apparaître S_n), on obtient :

$$\sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = S_n$$

On reconnaît alors à gauche une somme télescopique. On a alors :

$$S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1})$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}) = +\infty$, on en déduit par minoration que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

3. On pose désormais pour tout $n \geq 1$: $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par -2 .

- Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - S_n + 2\sqrt{n} \\ &= S_{n+1} - S_n - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0 \quad \text{d'après la première question} \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

- D'autre part, on a d'après l'inégalité obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &\geq 2(\sqrt{n+1} - 1) \\ \Rightarrow S_n - 2\sqrt{n} &\geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \sqrt{1}) \\ \Rightarrow u_n &\geq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - 2 \\ \Rightarrow u_n &\geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2 \quad \text{d'après la première question} \\ \Rightarrow u_n &\geq -2 \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par -2 .

4. **En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge puis déterminer un équivalent simple de S_n .**

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par -2 donc elle converge vers une limite notée ℓ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

On a alors :

$$S_n - 2\sqrt{n} = \ell + o(1) \quad \text{donc} \quad S_n = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) \quad \text{donc} \quad S_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \quad \text{donc} \quad S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

- EXERCICE 10 -

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$.

On note Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre 1 : $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.

1. **Rappeler la loi de X_n ainsi que celle de Y (univers et formule).**

$$X_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \text{ et pour tout } k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}.$$

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad P(Y = k) = \frac{1^k e^{-1}}{k!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

2. **Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé : $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.**

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! (n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1) \cancel{(n-k)!}}{k! \cancel{(n-k)!}} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{\overbrace{(n)}^{\sim n} \overbrace{(n-1)}^{\sim n} \dots \overbrace{(n-k+1)}^{\sim n}}{k!} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \quad \text{car il y a } k \text{ termes au numérateur} \end{aligned}$$

3. **En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!} = P(Y = k)$ avec $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.**

On dit que la de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi que Y .

On a alors avec les deux questions précédentes :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k!} \overbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-k}}^{\sim 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{De plus, on a : } \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right).$$

$$\text{Or, } \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{donc} \quad \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n} \quad \text{donc : } n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -1.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1.$$

On conclut par composition par la fonction exp qui est continue : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$.

$$\text{Finalement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e^{-1}}{k!} = P(Y = k).$$