

- EXERCICE 1 -

1. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 2X$ est-il une combinaison linéaire des polynômes $X^2(X-1)$ et $X(X-1)^2$?
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

- EXERCICE 2 -

1. Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en déterminant une famille génératrice.
2. Déterminer une base de ces espaces vectoriels.

$$\begin{aligned} \bullet A &= \{(x-y, x+y, 2x-3y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ \bullet B &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} -x+2y = y+6z \\ y+3z = -2x \end{cases} \right\} \\ \bullet C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \bullet D &= \left\{ \begin{pmatrix} x+z & 2x-y & z \\ y-x & z+2y & x+z \\ 0 & 2x & x-z \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ \bullet F &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0\} \\ \bullet G &= \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+d=0 \right\} \end{aligned} \right.$$

- EXERCICE 3 -

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM - MA = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et que $\mathcal{F} = \text{Vect}(A, I)$.
2. Montrer que pour tout entier n , $A^n \in \mathcal{F}$.
3. En déduire que pour tout entier n , il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n I + b_n A$.

- EXERCICE 4 -

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées? Préciser leur rang.

1. $((4, -16, 10); (4, -5, 3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $((-1, 0, 1); (1, -1, 1); (0, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1, 1, 1, 1); (1, 2, 3, 4); (1, 2, 8, 16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
4. $((2, 2, 2); (1, 1, 0); (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. $((1, 0, -1), (-1, 2, 1), (3, -4, -3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
6. $(X^2; X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
7. $(X^2; X^2 - X; X^2 + X)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
8. $(X^2, X(X-2); (X-2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
9. $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
10. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- EXERCICE 5 -

Soit E un espace vectoriel admettant pour base la famille : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

Soient x, y, z, u et v les cinq vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit enfin $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs x, y, z, u et v .

1. Exprimer les vecteurs x, y, z, u et v en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5; e_1 + e_5)$ est une base de $\mathcal{D}$.

- EXERCICE 6 -

Soit $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. En donner une base $\mathcal{B}$ et préciser sa dimension.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1, 2, 1); (1, 1, 0))$ est aussi une base de $\mathcal{E}$.
3. Montrer que $(-1, 1, 2) \in \mathcal{E}$ et déterminer ses coordonnées dans chacune des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

- EXERCICE 7 -

Soient a, b et c des réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c} : \mathcal{F} = \{M_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et en donner une base $\mathcal{B}$.
2. Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J puis montrer que : $\mathcal{F} = \text{Vect}(I, A, A^2)$.
3. En déduire que la famille $\mathcal{C} = (I, A, A^2)$ est une base de $\mathcal{F}$.
4. Déterminer les coordonnées de la matrice A^2 dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$.

- EXERCICE 8 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose $n = 3$. Déterminer une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

- EXERCICE 9 -

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note : $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ et $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

1. Montrer que l'ensemble $E_2(A)$ est un espace vectoriel.
2. On suppose que $n = 3$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - (a) Déterminer une base (U, V) de $E_2(A)$ et une base (W) de $E_1(A)$.
 - (b) La famille (U, V, W) est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?

- EXERCICE 10 -

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); A^2 M = AM\}$$

1. Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que : $E_1(A) \subset E_2(A)$ et que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.

- EXERCICE 11 -

1. $\mathcal{F}_0 = ((1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3))$ est elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$? génératrice de $\mathbb{R}^3$? une base de $\mathbb{R}^3$?
2. $\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 2, 0); (0, 1, -1, 0); (0, 2, 0, 1))$ est elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? une base de $\mathbb{R}^4$?
3. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est elle une famille libre de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$? génératrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$?
4. $\mathcal{F}_3 = (2X^2 + 1; 4X - 7)$ est elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$? une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
5. $\mathcal{F}_4 = (1; (X-1); (X-1)^2)$ est elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$? une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

- EXERCICE 12 -

1. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille $((1, 1, 1, 1); (1, -1, 1, -1); (1, 1, -1, -1); (1, -1, -1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ puis déterminer les coordonnées de $(2, 0, 2, 0)$ dans cette base.
3. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ dans cette base.
4. Montrer que la famille $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = X$ dans cette base.

- EXERCICE 13 -

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang de la matrice A et de la matrice $A - I$.
2. Ces matrices sont-elles inversibles?

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 14 -

Soit E un espace vectoriel admettant la famille (e_1, e_2, e_3) comme base.
On considère les vecteurs : $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$, $e'_3 = e_3$ de E .
Montrer que la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E .

- EXERCICE 15 -

On considère les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Démontrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que : $M = S + A$.
On pourra supposer que cette relation est vérifiée pour trouver des candidats pour les matrices S et A .

- EXERCICE 16 -

On admet que l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ est un espace vectoriel.
Considérons alors l'ensemble $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f''' = 2f' - f\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.
2. Vérifier que les fonctions $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto xe^x$ appartiennent à l'ensemble $\mathcal{F}$.
3. Soit $f \in \mathcal{F}$. On définit alors $h : x \mapsto e^{-x}f(x)$.
- (a) Montrer que : $h'' = 0$.
- (b) En déduire l'expression de h puis celle de f .
4. En déduire une base et la dimension de $\mathcal{F}$.
5. Retrouver ce résultat en utilisant le cours de première année sur les équations différentielles.

- EXERCICE 17 -

On admet que l'ensemble des suites numériques $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel et on considère le sous ensemble

$$\mathcal{R} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n\}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en déterminant une famille génératrice.
2. En déduire que cette famille est une base de $\mathcal{R}$.

- EXERCICE 18 -

Pour tout entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.
Le but de l'exercice est de démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ forme une base de $R_n[X]$.

1. Quel est le degré du polynôme P_k ?
2. Quel est le terme de plus bas degré de P_k ?
3. On suppose que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est liée.
- (a) Justifier qu'il existe $(n+1)$ réels $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ non tous nuls (i.e $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$) tels que :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X) = 0.$$

- (b) Ainsi, l'ensemble $A = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$ est non vide.
On pose alors $k_0 = \min_{k \in A}(k)$ le plus petit indice k pour lequel $\lambda_k \neq 0$.

Quel est le terme de degré k_0 dans $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X)$?

- (c) En déduire que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

4. Conclure.