

- EXERCICE 1 -

1. Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} 2b + 2c = 4 \\ a + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$.

On trouve après résolution par pivot de Gauss : $a = -5, b = -2$ et $c = 4$.

Donc le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 2X$ est-il une combinaison linéaire des polynômes

$X^2(X-1), X(X-1)^2$?

On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $P(X) = X^3 + X^2 - 2X = aX^2(X-1) + bX(X-1)^2$ soit après développement :

$X^3 + X^2 - 2X = (a+b)X^3 - (a+2b)X^2 + bX$.

On identifie les coefficients ce qui donne $\begin{cases} a+b=1 \\ -(a+2b)=1 \\ b=-2 \end{cases}$ et on trouve : $a=3$ et $b=-2$.

Donc le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 2X$ est bien combinaison linéaire des polynômes $X^2(X-1)$ et $X(X-1)^2$.

3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire des matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ce qui donne en particulier :

$3a = 6, 2b = 4$ et $2a + b = 3$ soit $a = 2, b = 2$ et $6 = 3$ ce qui est impossible donc il n'y a pas de solutions.

Donc $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- EXERCICE 2 -

1. Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en déterminant une famille génératrice.

2. Déterminer une base de ces espaces vectoriels.

• $A = \{(x-y, x+y, 2x-3y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. On met en facteur les variables x et y pour faire apparaître les vecteurs de la famille génératrice.

On obtient :

$A = \{x(1, 1, 2) + y(-1, 1, -3), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 2); (-1, 1, -3))$ donc A est le sev de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $((1, 1, 2); (-1, 1, -3))$ donc c'est un espace vectoriel.

2. La famille $((1, 1, 2); (-1, 1, -3))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de A .

• $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} -x+2y = y+6z \\ y+3z = -2x \end{cases} \right\}$.

1. On résout le système :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \iff \begin{cases} -x+y-6z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} x=-3z \\ y=3z \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} -3z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $B = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(U)$ est le sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendré par (U) donc c'est un espace vectoriel.

2. La famille (U) est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de B .

• $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}$.

1. Même méthode que pour B . On résout le système :

$$\vec{u} = (x, y, z) \in C \iff x+2y-3z=0 \iff x=-2y+3z \iff \vec{u} = (-2y+3z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1)$$

Donc $C = \text{Vect}((-2, 1, 0); (3, 0, 1))$. C est le sev de $\mathbb{R}^3$ engendré par $((-2, 1, 0); (3, 0, 1))$ donc c'est un espace vectoriel.

2. La famille $((-2, 1, 0); (3, 0, 1))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de C .

$$\bullet D = \left\{ \begin{pmatrix} x+z & 2x-y & z \\ y-x & z+2y & x+z \\ 0 & 2x & x-z \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. On met en facteur les variables x, y et z pour faire apparaître les vecteurs de la famille génératrice.

$$\text{On trouve : } D = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}(A, B, C).$$

D est donc le sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C) donc c'est un espace vectoriel.

2. La famille (A, B, C) est clairement libre (par zéros échelonnés) donc c'est une base de D .

• $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X] : P(X) = aX^2 + bX + c$. On a :

$$P \in F \iff \begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0+0+c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=0 \\ a=-b \end{cases} \iff P(X) = -bX^2 + bX$$

Ainsi, $P \in F \iff P(X) = -bX^2 + bX = b(X - X^2)$ donc : $F = \text{Vect}\left(\underbrace{X - X^2}_{=P_0}\right) = \text{Vect}(P_0)$.

F est le sev de $\mathbb{R}_3[X]$ engendré par (P_0) donc c'est un espace vectoriel.

2. La famille (P_0) est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de F .

• $G = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+d=0 \right\}$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$M \in G \iff a+d=0$$

$$\iff d=-a$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_A + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_B + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_C = aA + bB + cC$$

Ainsi, $G = \text{Vect}(A; B; C)$ est le sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $(A; B; C)$ donc c'est un espace vectoriel.

2. La famille $(A; B; C)$ est clairement libre (zéros échelonnés) donc c'est une base de G .

- EXERCICE 3 -

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM - MA = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et que $\mathcal{F} = \text{Vect}(A, I)$.

On connaît la matrice A donc on utilise la méthode explicite. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a :

$$M \in \mathcal{F} \iff AM - MA = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \dots \iff \begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases} \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \mathcal{F} = \text{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_I; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_J\right) = \text{Vect}(I; J).$$

Puis on transforme par combinaisons linéaires pour faire apparaître A (en remarquant que $A = 2I + J$) :

$$\mathcal{F} = \text{Vect}(I; J) = \text{Vect}(I; 2I + J) = \text{Vect}(I; A).$$

2. **Montrer que pour tout entier n , $A^n \in \mathcal{F}$.**
On commence par écrire au brouillon la propriété d'appartenance à $\mathcal{F}$: $S \in \mathcal{F} \iff AS - SA = 0$.
Ici, on remplace M par A^n dans la propriété d'appartenance à $\mathcal{F}$ pour tester si elle est vérifiée.
Soit, $n \in \mathbb{N}$. On a : $AA^n - A^nA = A^{n+1} - A^{n+1} = 0$ donc $A^n \in \mathcal{F}$.
3. **En déduire que pour tout entier n , il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nI + b_nA$.**
On a d'après les deux questions précédentes : $A^n \in \mathcal{F} = \text{Vect}(I; A)$, ce qui signifie que A^n est une combinaison linéaire des matrices I et A .
Ainsi, il existe deux réels (coefficients) a_n et b_n tels que $A^n = a_nI + b_nA$.

- EXERCICE 4 -
Les familles suivantes sont-elles libres ou liées? Préciser leur rang.

1. $((4, -16, 10); (4, -5, 3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
La famille $((4, -16, 10); (4, -5, 3))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ car composée de deux vecteurs non colinéaires.
Ainsi, $\text{rg}((4, -16, 10); (4, -5, 3)) = 2$.
2. $((-1, 0, 1); (1, -1, 1); (0, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
La famille $((-1, 0, 1); (1, -1, 1); (0, 1, 2))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$: preuve usuelle.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$a(-1, 0, 1) + b(1, -1, 1) + c(0, 1, 2) = (0, 0, 0) \iff \dots \iff a = b = c = 0$$

- Ainsi, $\text{rg}((-1, 0, 1); (1, -1, 1); (0, 1, 2)) = 3$.
3. $((1, 1, 1, 1); (1, 2, 3, 4); (1, 2, 8, 16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
La famille $((1, 1, 1, 1); (1, 2, 3, 4); (1, 2, 8, 16))$ est libre dans $\mathbb{R}^4$: preuve usuelle.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$a(1, 1, 1, 1) + b(1, 2, 3, 4) + c(1, 2, 8, 16) = (0, 0, 0, 0) \iff \dots \iff a = b = c = 0$$

- Ainsi, $\text{rg}((1, 1, 1, 1); (1, 2, 3, 4); (1, 2, 8, 16)) = 3$.
4. $((2, 2, 2); (1, 1, 0); (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
La famille $((2, 2, 2); (1, 1, 0); (1, 1, 1))$ est liée dans $\mathbb{R}^3$ car contient deux vecteurs proportionnels : $(2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$.
Ainsi, $\text{rg}((2, 2, 2); (1, 1, 0); (1, 1, 1)) = \text{rg}((1, 1, 0); (1, 1, 1)) = 2$ car la famille $((1, 1, 0); (1, 1, 1))$ est libre (deux vecteurs non colinéaires).
5. $((1, 0, -1); (-1, 2, 1); (3, -4, -3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
La famille $\left(\underbrace{(1, 0, -1)}_u; \underbrace{(-1, 2, 1)}_v; \underbrace{(3, -4, -3)}_w \right)$ est liée dans $\mathbb{R}^3$ car w est CL de u et v ($w = -u - 2v$).
Ainsi, $\text{rg}(u, v, w) = \text{rg}(u, v) = 2$ car la famille (u, v) est libre (deux vecteurs non colinéaires).
6. $(X^2; X^2 + X + 1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
La famille $(X^2; X^2 + X + 1)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$ car composée de deux vecteurs non colinéaires. Ainsi, $\text{rg}(X^2; X^2 + X + 1) = 2$.
7. $(X^2; X^2 - X; X^2 + X)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
La famille $\left(\underbrace{X^2}_{P_1}; \underbrace{X^2 - X}_{P_2}; \underbrace{X^2 + X}_{P_3} \right)$ est liée dans $\mathbb{R}[X]$ car P_1 est CL de P_2 et P_3 ($P_1 = 1/2P_2 + 1/2P_3$).
Ainsi, $\text{rg}(P_1, P_2, P_3) = \text{rg}(P_2, P_3) = 2$ car la famille (P_2, P_3) est libre (deux vecteurs non colinéaires).
8. $(X^2, X(X-2); (X-2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
La famille $(X^2, X(X-2); (X-2)^2)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$: preuve usuelle.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$aX^2 + bX(X-2) + c(X-2)^2 = 0 \iff (a+b+c)X^2 - (2b+4c)X + 4c = 0 \iff \dots \iff a = b = c = 0$$

Il faut développer l'expression $aX^2 + bX(X-2) + c(X-2)^2$ puis identifier les coefficients obtenus à ceux du polynôme nul (qui sont tous nuls) puis résoudre le système.
Ainsi, $\text{rg}(X^2, X(X-2); (X-2)^2) = 3$.

9. $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
La famille $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1}; \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{M_2} \right)$ est liée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $M_2 = -3M_1$.
Ainsi, $\text{rg}(M_1, M_2) = \text{rg}(M_1) = 1$ (un vecteur libre car non nul).
10. $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2}; \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{M_3} \right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 (M_1, M_2, M_3) est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: preuve usuelle.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \dots \iff a = b = c = 0$$

$$\text{Ainsi, } \text{rg}(M_1, M_2, M_3) = 3.$$

- EXERCICE 5 -
Soit E un espace vectoriel admettant pour base la famille : $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.
Soient x, y, z, u et v les cinq vecteurs de E dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soit enfin $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs x, y, z, u et v .

1. **Exprimer les vecteurs x, y, z, u et v en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.**
La lecture des coordonnées donne :

$$x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, \quad y = z = u = e_1 + e_5, \quad v = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5$$

2. **Montrer que la famille $\mathcal{F} = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5; e_1 + e_5)$ est une base de $\mathcal{D}$.**
Il s'agit tout d'abord de montrer que : $\mathcal{D} = \text{Vect}(x; y)$. Or, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \text{Vect}(x; y; z; u; v) \quad \text{par définition} \\ &= \text{Vect}(x; y; v) \quad \text{car } z = u = y \\ &= \text{Vect}(x; y) \quad \text{car } v = x + y \end{aligned}$$

La famille $(x; y) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5; e_1 + e_5)$ est génératrice de $\mathcal{D}$ et libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $\mathcal{D}$.

- EXERCICE 6 -**
Soit $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.
1. **Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. En donner une base $\mathcal{B}$ et préciser sa dimension.**
On trouve après résolution (en isolant z) : $\mathcal{E} = \text{Vect}((1, 1, 0); (1, 0, -1))$.
Remarque : Si on choisit d'isoler y par exemple, on obtient : $\mathcal{E} = \text{Vect}((1, 1, 0); (0, 1, 1))$ ce qui est également correct. Il y a plusieurs descriptions possibles du sev $\mathcal{E}$.
Ainsi, $\mathcal{E} = \text{Vect}((1, 1, 0); (1, 0, -1))$ est le sous espace vectoriel engendré par $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ donc c'est un espace vectoriel.
La famille $\mathcal{B} = ((1, 1, 0); (1, 0, -1))$ est génératrice de $\mathcal{E}$ et elle est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $\mathcal{E}$ et $\dim(\mathcal{E}) = 2$.
2. **Montrer que la famille $\mathcal{B}' = ((1, 2, 1); (1, 1, 0))$ est aussi une base de $\mathcal{E}$.**

- Méthode 1 (famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension 2).
On commence par vérifier que les vecteurs $(1, 2, 1)$ et $(1, 1, 0)$ appartiennent à $\mathcal{E}$. C'est le cas car ils vérifient l'équation $x - y + z = 0$.
La famille est $\mathcal{B}' = ((1, 2, 1); (1, 1, 0))$ est une famille libre (deux vecteurs non colinéaires) composée de deux vecteurs de $\mathcal{E}$ qui est de dimension 2. C'est donc une base de $\mathcal{E}$.
- Méthode 2 (famille génératrice de deux vecteurs dans un espace de dimension 2).
On peut remarquer que : $\mathcal{E} = \text{Vect}((1, 1, 0); (1, 0, -1)) = \text{Vect}((1, 1, 0); (1, 2, 1))$.
Ainsi, la famille $\mathcal{B}' = ((1, 2, 1); (1, 1, 0))$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$, composée de deux vecteurs de $\mathcal{E}$ qui est de dimension 2. C'est donc une base de $\mathcal{E}$.

3. **Montrer que $(-1, 1, 2) \in \mathcal{E}$ et déterminer ses coordonnées dans chacune des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.**

Le vecteur $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ vérifie l'équation $x - y + z = 0$ donc appartient à $\mathcal{E}$.

Notons (e_1, e_2) les vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

On a : $\vec{u} = 1e_1 - 2e_2$ donc les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}$ sont $Mat_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Notons (e'_1, e'_2) les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$.

On a : $\vec{u} = 2e'_1 - 3e'_2$ donc les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}'$ sont $Mat_{\mathcal{B}'}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

- EXERCICE 7 -

Soient a, b et c des réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$: $\mathcal{F} = \{M_{a,b,c}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. **Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et en donner une base $\mathcal{B}$.**

On remarque que $M_{a,b,c} = aI + bA + cJ$ donc

$$\mathcal{F} = \{aI + bA + cJ, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(I; A; J)$$

donc $\mathcal{F}$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $(I; A; J)$. C'est donc un espace vectoriel. La famille $\mathcal{B} = (I; A; J)$ étant clairement libre (par zéros échelonnés), c'est une base de $\mathcal{F}$.

2. **Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J puis montrer que :** $\mathcal{F} = \text{Vect}(I, A, A^2)$.

On trouve : $A^2 = I + J$ donc par opération sur les Vect, on a :

$$\mathcal{F} = \text{Vect}(I; A; J) = \text{Vect}(I, A, I + J) = \text{Vect}(I, A, A^2).$$

3. **En déduire que la famille $\mathcal{C} = (I, A, A^2)$ est une base de $\mathcal{F}$.**

- Méthode 1 :
La famille (I, A, A^2) est génératrice de $\mathcal{F}$. On montre que cette famille est libre ce qui prouve que c'est une base de $\mathcal{F}$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$aI + bA + cA^2 = 0 \iff \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \iff a=b=c=0$$

Donc la famille (I, A, A^2) est libre.

- Méthode 2 :
La famille (I, A, A^2) est génératrice de $\mathcal{F}$ et est composée de 3 vecteurs. Comme $\dim(\mathcal{F}) = 3$ (d'après la question 1), on en déduit que c'est une base de $\mathcal{F}$.
4. **Déterminer les coordonnées de la matrice A^2 dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$.**

- Dans la base $\mathcal{B} = (I; A; J)$. On a vu que : $A^2 = I + J$ soit $A^2 = 1I + 0A + 1J$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(A^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Dans la base $\mathcal{C} = (I; A; A^2)$. $A^2 = 0I + 0A + 1A^2$ donc $Mat_{\mathcal{C}}(A^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- EXERCICE 8 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$.

1. **Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

- $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ car ${}^t0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = -0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.
- Soient $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} {}^t(M + \lambda N) &= {}^tM + \lambda {}^tN \\ &= -M + \lambda(-N) \quad \text{car } (M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2 \\ &= -(M + \lambda N) \end{aligned}$$

donc $(M + \lambda N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. **On suppose $n = 3$. Déterminer une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.**

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &\iff {}^tM = -M \iff \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = -a \\ d = -b \\ g = -c \\ b = -d \\ e = -e \\ h = -f \\ c = -g \\ f = -h \\ i = -i \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = 0 \\ d = -b \\ g = -c \\ 2e = 0 \\ h = -f \\ 2i = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = e = i = 0 \\ b = -d \\ g = -c \\ h = -f \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} 0 & -d & -c \\ d & 0 & -f \\ c & f & 0 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= dM_1 + cM_2 + fM_3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$.

Ainsi, la famille (M_1, M_2, M_3) engendre $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. De plus, la famille (M_1, M_2, M_3) est clairement libre (par zéros échelonnés) donc c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

- EXERCICE 9 -

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note : $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

1. **Montrer que l'ensemble $E_2(A)$ est un espace vectoriel.**

On ne connaît pas la matrice A donc on utilise la méthode théorique.

- $A0 = 20$ donc $0 \in E_2(A)$ donc $E_2(A) \neq \emptyset$.
- Soient $(X, Y) \in (E_2(A))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
 $A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY = 2X + 2\lambda Y = 2(X + \lambda Y)$.- Donc $X + \lambda Y \in E_2(A)$.

Donc $E_2(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel.

2. On suppose que $n = 3$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) **Déterminer une base (U, V) de $E_2(A)$ et une base (W) de $E_1(A)$.**
On connaît la matrice A donc on utilise la méthode explicite.

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(A) &\iff AX = 2X \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ -x - z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = xU + yV \end{aligned}$$

Ainsi : $E_2(A) = \text{Vect}(U, V)$. La famille (U, V) est génératrice de $E_2(A)$ et elle est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $E_2(A)$.
De même, on obtient :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) &\iff AX = X \iff \begin{cases} 2x + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = -1/2z \\ y = 1/2z \end{cases} \\ &\iff \iff X = \begin{pmatrix} -1/2z \\ 1/2z \\ z \end{pmatrix} = 1/2z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1/2zW \end{aligned}$$

Ainsi : $E_1(A) = \text{Vect}(W)$. La famille (W) est génératrice de $E_1(A)$ et elle est libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de $E_1(A)$.

- (b) **La famille (U, V, W) est-elle une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?**
Vérifions si cette famille est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} aU + bV + cW = 0 &\iff a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a - c = 0 \\ b + c = 0 \\ -a + 2c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille (U, V, W) est libre et composée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3 donc (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- EXERCICE 10 -

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On considère les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); AM = M\} \quad \text{et} \quad E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); A^2M = AM\}$$

1. **Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**

On ne connaît la matrice A donc on utilise la méthode théorique.

On commence par écrire au brouillon la caractérisation de $E_1(A)$: $S \in E_1(A) \iff AS = S$.

- $A0 = 0$ donc $0 \in E_1(A)$ et $E_1(A) \neq \emptyset$.
- Soient $(M, N) \in E_1(A)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = M + \lambda N \quad \text{car} \quad AM = M \quad \text{et} \quad AN = N \quad \text{par hypothèse}$$

donc $M + \lambda N \in E_1(A)$ donc $E_1(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De même pour $E_2(A)$.

2. **Montrer que : $E_1(A) \subset E_2(A)$ et que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$.**

- Méthode : Pour montrer une inclusion entre deux ensembles ($F \subset G$ par exemple), on doit montrer que si x appartient à F , alors x appartient aussi à G .

Ici, pour montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$ il faut donc choisir un élément quelconque appartenant à $E_1(A)$ et montrer qu'il appartient aussi à $E_2(A)$.

Soit $M \in E_1(A)$. On a :

$$M \in E_1(A) \iff AM = M \implies AAM = AM \iff A^2M = AM \iff M \in E_2(A)$$

donc $E_1(A) \subset E_2(A)$.

Remarque :

La deuxième étape n'est pas une équivalence car on ne peut pas écrire $AAM = AM \implies AM = M$ sans savoir si A est inversible (ce qu'on ne sait pas ici).

- Méthode : Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on peut procéder par double inclusion ($F \subset G$ et $G \subset F$).

Ici, on sait déjà que $E_1(A) \subset E_2(A)$. Pour obtenir l'égalité (sous l'hypothèse donnée), il suffit de montrer l'inclusion inverse : $E_2(A) \subset E_1(A)$.

Supposons A inversible. Soit $M \in E_2(A)$. On a en utilisant que A^{-1} existe par hypothèse :

$$M \in E_2(A) \iff A^2M = AM \iff A^{-1}A^2M = A^{-1}AM \iff AM = M \iff M \in E_1(A)$$

donc $E_2(A) \subset E_1(A)$ donc $E_2(A) = E_1(A)$.

- EXERCICE 11 -

1. $\mathcal{F}_0 = ((1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3))$ est elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$? génératrice de $\mathbb{R}^3$? une base de $\mathbb{R}^3$?

La famille $\mathcal{F}_0 = ((1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1); (1, 2, 3))$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (car comporte 4 vecteurs dans un espace de dimension 3.)

Elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$ (par ses trois premiers vecteurs).

Ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ (elle n'est pas libre).

2. $\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 2, 0); (0, 1, -1, 0); (0, 2, 0, 1))$ est elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? une base de $\mathbb{R}^4$?

La famille $\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 2, 0); (0, 1, -1, 0); (0, 2, 0, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ (à vérifier par un système).

Ce n'est une base de $\mathbb{R}^4$ car $\mathcal{F}_1$ contient 3 vecteurs alors qu'une base de $\mathbb{R}^4$ (qui est un espace de dimension 4) doit contenir 4 vecteurs.

3. $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est elle une famille libre de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$? génératrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$?

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ (à vérifier par un système).

Elle n'est pas génératrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ (3 vecteurs dans un espace de dimension 6).

4. $\mathcal{F}_3 = (2X^2 + 1; 4X - 7)$ est elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$? une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

La famille $\mathcal{F}_3 = (2X^2 + 1; 4X - 7)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ (deux vecteurs non colinéaires);

Ce n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$ (2 vecteurs dans un espace de dimension 3).

5. $\mathcal{F}_4 = (1; (X - 1); (X - 1)^2)$ est elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$? une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

La famille $\mathcal{F}_4 = (1; (X - 1); (X - 1)^2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ (comme famille de polynômes de degrés échelonnés ou à vérifier avec un système).

C'est une famille libre composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- EXERCICE 12 -

1. **Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.**

Notons : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} aU + bV + cW = 0 &\iff a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2b-c \\ a+b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a+2b-c=0 \\ a+b=0 \\ c=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+2b-c=0 \\ -b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \{ a=b=c=0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(U; V; W)$ est une famille libre composée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3 donc $(U; V; W)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. **Montrer que la famille $((1, 1, 1, 1); (1, -1, 1, -1); (1, 1, -1, -1); (1, -1, -1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ puis déterminer les coordonnées de $(2, 0, 2, 0)$ dans cette base.**

On commence par vérifier que la famille $\left(\underbrace{(1, 1, 1, 1)}_u; \underbrace{(1, -1, 1, -1)}_v; \underbrace{(1, 1, -1, -1)}_w; \underbrace{(1, -1, -1, 1)}_t\right)$ est libre (avec un système).

Puis, la famille (u, v, w, t) est libre et est composée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est un espace de dimension 4 donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

On remarque que $(2, 0, 2, 0) = (1, 1, 1, 1) + (1, -1, 1, -1) = u + v$ donc les coordonnées du vecteur $(2, 0, 2, 0)$

dans la base (u, v, w, t) sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

3. **Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ dans cette base.**

On commence par vérifier que la famille $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_A, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_B, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_C, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_D\right)$ est libre (avec un système).

Puis, la famille (A, B, C, D) est libre et est composée de 4 vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace de dimension 4 donc c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On remarque que $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A + B + 2C + 2D$ donc les coordonnées

de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ dans cette base sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

4. **Montrer que la famille $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = X$ dans cette base.**

On commence par vérifier que la famille $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ est libre (avec un système).

Puis, la famille $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ est libre et est composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est un espace de dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Notons $(R_0, R_1, R_2) = (X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ les vecteurs de cette base.

On remarque que $X = X^2 - X(X-1)$ soit $P(X) = R_0(X) - R_1(X)$ donc les coordonnées du polynôme $P(X) = X$

dans cette base sont : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

- EXERCICE 13 -

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. **Déterminer le rang de la matrice A et de la matrice $A - I$.**

Le pivot de Gauss donne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2L_4+L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donc $\text{rg}(A) = 4$.

On a en passant par le rang des colonnes de A :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - I) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{car } C_4 = -C_1 \\ &= 1 \quad \text{car un vecteur non nul} \end{aligned}$$

2. **Ces matrices sont-elles inversibles?**

A est inversible car $\text{rg}(A) = 4$.

$A - I$ n'est pas inversible car $\text{rg}(A - I) = 1$ (ou directement $A - I$ a une colonne nulle).

- EXERCICE 18 -

Pour tout entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note $P_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Quel est le degré du polynôme P_k ?

On a : $\deg(P_k) = \deg(X^k) + \deg((1 - X)^{n-k}) = k + n - k = n$ donc P_k est un polynôme de degré n .

2. Quel est le terme de plus bas degré de P_k ?

D'après la formule du binôme, le terme de plus bas degré de $(1 - X)^{n-k}$ est 1 donc le terme de plus bas degré de $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ est X^k .

3. On suppose que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est liée.

(a) Justifier qu'il existe $(n + 1)$ réels $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ non tous nuls (i.e $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$) tels que :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X) = 0.$$

La famille $(P_0, \dots, P_n)$ n'est pas libre donc l'équation $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X) = 0$ admet au moins une autre solution que $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Cette autre solution vérifie la relation demandée (au moins un des λ_i est non nul).

(b) Ainsi, l'ensemble $A = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$ est non vide.

On pose alors $k_0 = \min_{k \in A} (k)$ le plus petit indice k pour lequel $\lambda_k \neq 0$.

Quel est le terme de degré k_0 dans $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X)$?

Par définition de k_0 , on a :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X) = \sum_{i=k_0}^n \lambda_i P_i(X) = \lambda_{k_0} P_{k_0}(X) + \sum_{i=k_0+1}^n \lambda_i P_i(X)$$

Or, le polynôme $\sum_{i=k_0+1}^n \lambda_i P_i(X)$ ne contient pas de terme en X^{k_0} puisque son terme de plus bas degré est $k_0 + 1$ (d'après la question 2).

Ainsi, le terme de degré k_0 dans $\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X)$ est le terme de degré k_0 dans $\lambda_{k_0} P_{k_0}(X) = \lambda_{k_0} X^{k_0} (1 - X)^{n-k_0}$ soit $\lambda_{k_0} X^{k_0}$ (d'après la formule du binôme).

(c) En déduire que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

On a :

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i(X) = 0 \quad \text{soit} \quad \lambda_{k_0} X^{k_0} + \underbrace{\sum_{i=k_0+1}^n \dots X^i}_{\text{termes de degré supérieurs}} = 0$$

donc en identifiant les coefficients, on trouve $\lambda_{k_0} = 0$ ce qui est contraire à la définition de k_0 .

Ainsi, on aboutit à une contradiction donc l'hypothèse de départ est fausse ce qui permet de conclure que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

4. Conclusion.

La famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre et composée de $(n + 1)$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $(n + 1)$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.