

**- EXERCICE 1 -**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$ .

On introduit pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = \frac{u_n}{3^n}$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire le terme général de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**- EXERCICE 2 -**

On pose  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 2$ , et pour tout entier naturel  $n$  :  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$ .

1. Montrer que l'on définit ainsi deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels strictement positifs.
2. Écrire un programme Python qui calcule et affiche les valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.
3. (a) Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n)$ .  
(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < b_n$ .  
(c) Montrer alors que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.  
(d) Montrer que :  $b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$ , puis établir la stricte décroissance de la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. (a) A l'aide de la question 3a, établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$ .  
(b) En déduire que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite notée  $\ell$  vérifiant :  $a_n \leq \ell \leq b_n$   
(c) Écrire un programme Python qui renvoie une valeur approchée de  $\ell$  à moins de  $10^{-3}$  près ?

**- EXERCICE 3 -**

On pose  $u_1 = \frac{1}{2}$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}$ .

1. Montrer que l'on définit ainsi une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , de nombres réels strictement positifs.
2. Écrire une fonction Python qui prend comme paramètre un entier  $n$  et qui renvoie la valeur de  $u_n$ .
3. Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$  puis en déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite à préciser.
4. Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on pose :  $v_k = \frac{1}{u_k}$ .  
(a) Établir l'égalité :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$ .  
(b) En déduire la relation suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n(n+1)$ .  
(c) Déterminer alors explicitement  $u_n$  en fonction de  $n$  puis retrouver sa limite.

**- EXERCICE 4 -**

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par son premier terme  $u_0 \geq 1$  et la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ .

1. Dans cette question, on suppose que  $u_0 = 2$ . Écrire un programme Python qui renvoie une liste contenant tous les termes de la suite entre 0 et 100.
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n \geq 1$ .
3. Déterminer le sens de variation de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. Prouver par l'absurde que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas.

**- EXERCICE 5 -**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  positif ou nul par :  $f(x) = 1 - e^{-x}$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_1 = 1$  et pour tout entier naturel non nul  $n$  par :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $u_n > 0$ .

3. Calculer  $u_2$  puis étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

4. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente puis déterminer sa limite.

On pourra étudier la fonction  $x \mapsto f(x) - x$ .

**- EXERCICE 6 -**

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :  $u_0 = 1$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $0 \leq u_n \leq 1$ .
2. Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, 1]$ , à valeurs réelles, telle que :  $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$ .  
(a) Déterminer le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  et montrer que  $f(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .  
(b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.  
(c) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge et déterminer sa limite.
3. (a) Justifier pour tout réel  $x \geq 0$ , l'inégalité :  $\ln(1 + x) \leq x$ .  
(b) Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ , établir l'inégalité :  $u_{n+1} \leq u_n^2$ .  
(c) En déduire pour tout entier  $n \geq 1$ , l'inégalité :  $u_n \leq (\ln 2)^n$ .  
(d) Retrouver la valeur de la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .  
(e) Établir pour tout entier  $n \geq 2$ , l'inégalité :  $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}$ .

4. Écrire un programme Python permettant d'obtenir le plus petit entier  $n$  vérifiant  $u_n < 10^{-4}$ .

**- EXERCICE 7 -**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  positif ou nul par :  $f(x) = 1 - e^{-x}$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_1 = 1$  et pour tout entier naturel non nul  $n$  par :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$  :  $e^x \geq x + 1$  et que l'égalité a lieu si et seulement si  $x = 0$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :  $u_n > 0$ .
3. A l'aide de la question 1, étudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .
4. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente et déterminer sa limite.
5. (a) A l'aide de la question 1, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n}$  puis que  $\frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$ .  
(b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_n \geq \frac{1}{n}$ .

**- EXERCICE 8 -**

On considère la fonction  $F$  de  $X$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $F(x) = 1 - (1 + x)e^{-x}$ .

1. Montrer que l'équation  $F(x) = \frac{1}{2}$  admet une unique solution  $m$  et vérifier que  $1 \leq m \leq 2$ .  
On donne :  $0,3 < e^{-1} < 0,4$  et  $0,1 < e^{-2} < 0,15$ .

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de  $m$ .

On introduit pour cela la fonction  $g$  définie sur  $[1, 2]$  par :  $g(x) = \ln(2x + 2)$ .

On considère également la suite  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = g(u_{n-1}) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$ .

2. En revenant à la définition de  $m$ , montrer que  $g(m) = m$ .
3. Montrer que si  $x$  appartient à  $[1, 2]$  alors :  $g(x)$  appartient à  $[1, 2]$  et  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
4. Montrer alors que pour tout entier  $n$  :  $|u_{n+1} - m| \leq \frac{1}{2}|u_n - m|$ .
5. En déduire que pour tout entier  $n$  :  $|u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .
6. Quelle est la limite de la suite  $u_n$  ?
7. Écrire un programme en Python donnant une valeur approchée de  $m$  à  $10^{-2}$  près.

**- EXERCICE 9 -**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit la fonction  $f$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$ .

- Déterminer pour tout réel  $x$ ,  $f'_n(x)$  et  $f''_n(x)$ .
  - En déduire que la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ .
- Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une seule solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $u_n$ .
  - Montrer que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$  puis déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - Montrer que :  $f_{n+1}(u_n) = u_n < 0$ , puis en déduire le sens de variations de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
  - En revenant à la définition de  $u_n$ , montrer que  $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$ .

**- EXERCICE 10 -**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On se propose d'étudier les racines de l'équation  $(E_n)$  :  $\ln x + x = n$  pour  $x > 0$ .

- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :  $f : x \mapsto \ln x + x$ .
- En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(E_n)$  admet une unique racine  $x_n$ . Donner la valeur de  $x_1$ .
- Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante puis que  $x_n \geq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Justifier que  $f$  est bijective et donner le tableau de variation de  $f^{-1}$ .
  - En déduire la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- En utilisant (sans le redémontrer) que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x < x$ , prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2} \leq x_n \leq n$ .
  - En déduire que  $\frac{\ln(x_n)}{n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - En déduire que :  $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ .
  - Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} - x_n = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ .
  - En déduire la limite de  $x_{n+1} - x_n$ .
- Compléments :** On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}$ .
  - Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$ .
  - Quelle est la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ?
  - Prouver alors que :  $1 - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .
  - En déduire que, pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ .

**- EXERCICE 11 -**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par :  $f(x) = 2xe^x$ .

- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0; 1]$  sur un ensemble à déterminer.
- On note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$ . Donner les tableaux des variations complets de  $f$  et de  $f^{-1}$ .
- Montrer qu'il existe dans  $[0; 1]$  un unique réel noté  $\alpha$  tel que  $\alpha e^\alpha = 1$  et montrer que  $\alpha \neq 0$ .

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ .

- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \in ]0, 1]$ .
- Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$  :  $f(x) - x \geq 0$ . Vérifier que l'égalité ne se produit que pour  $x = 0$ .
  - En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante.
  - Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et qu'elle a pour limite 0.
- On se propose de déterminer  $\lim u_n$  d'une autre manière. On pose pour tout entier naturel  $n$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .
  - Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$ .

(b) En déduire par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$ .

(c) Montrer que :  $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$  puis conclure.

**- EXERCICE 12 -**

On admet que, si une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le réel  $\ell$ , alors on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$ .

On se propose d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée de  $u_0 = 0$  et par la relation, valable pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$ .

- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  on a,  $0 \leq u_n < 1$ .
  - Étudier les variations de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
  - Déduire des questions précédentes que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et donner sa limite.
- Pour tout entier naturel  $n$  on pose,  $v_n = 1 - u_n$ .
  - Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$ .
  - Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de  $v_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - En déduire que  $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**- EXERCICE 13 -**

Pour  $x \in ]0, +\infty[$  on pose :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ , valable pour tout entier naturel  $n$ .

- Étudier les variations de la fonction  $f : x \mapsto f(x)$  (on dressera son-tableau de variations, en précisant les limites).
  - Vérifier que chaque terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est correctement défini et strictement positif.
- Pour  $x \in [0, +\infty[$ , on pose :  $g(x) = e^{-x} - x^2$ .
  - Démontrer que la fonction  $g : x \mapsto g(x)$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $] -\infty, 1]$ .
  - En déduire que l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , possède une unique solution dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ , que l'on notera  $\alpha$ .
  - Justifier que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ . On rappelle que  $e \approx 2,7$ .
- Démontrer que l'on a :  $u_2 > u_0$ .
  - En déduire que la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
  - Justifier que la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
- Pour  $x \in ]0, +\infty[$  on pose :  $h(x) = f \circ f(x)$ . On pose également  $h(0) = 0$ .
  - Soit  $x$  un réel strictement positif. Déterminer  $h(x)$ .
  - Démontrer que la fonction  $h : x \mapsto h(x)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
  - Démontrer que l'équation  $h(x) = x$ , d'inconnue  $x$ , admet exactement deux solutions sur  $[0, +\infty[$  qui sont 0 et  $\alpha$ ,  $\alpha$  étant le réel introduit à la question 2b.
  - En déduire la limite de la suite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .
- La suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle majorée? Admet-elle une limite?