

- EXERCICE 1 -

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$.

On introduit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n}{3^n}$.

1. **Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.**

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2 \times 3^n v_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} v_n + \frac{1}{3}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n + \frac{1}{3}$ donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique avec $v_0 = 0$.

2. **En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**

On suit la méthode.

- On cherche ℓ vérifiant : $\ell = \frac{2}{3}\ell + \frac{1}{3}$ soit $3\ell - 2\ell = 1$ soit $\ell = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - \ell$ et on montre que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
On soustrait membre à membre les égalités de la manière suivante :

$$\begin{array}{rclcl} v_{n+1} & = & 2/3 \cdot v_n & + & 1/3 \\ - \quad \ell & = & 2/3 \cdot \ell & + & 1/3 \\ \hline v_{n+1} - \ell & = & 2/3 \cdot (v_n - \ell) & + & 0 \\ \text{soit } w_{n+1} & = & 2/3 \cdot w_n & & \end{array}$$

ce qui montre que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

On a donc, avec $w_0 = v_0 - \ell = -1$: $\forall n \in \mathbb{N}$: $w_n = -1 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et donc $v_n = w_n + \ell = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$.

Comme $u_n = 3^n v_n$, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

- EXERCICE 2 -

On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, et pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$.

1. **Montrer que l'on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs.**

Par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: " a_n et b_n existent et $an > 0$ et $b_n > 0$ ".

- Initialisation : $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Comme a_n et b_n existent et sont strictement positifs, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ existe et est strictement positif.

Ainsi, on a $a_{n+1} b_n > 0$ donc b_{n+1} existe (domaine de définition de $t \mapsto \sqrt{t}$) et $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} > 0$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion : ...

2. **Écrire un programme Python qui calcule et affiche les valeurs de a_n et b_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.**

```
1 n = int(input('Donnez la valeur de n : '))
2 a, b = 1, 2
3 for i in range(1, n+1) :
4     a = (a+b)/2
5     b = (a*b)**(1/2) # avec la nouvelle valeur de a
6 print(a, b)
```

$$3. (a) \text{ Établir que : } \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} (b_n - a_n).$$

D'après le résultat proposé, il va falloir factoriser par $\sqrt{a_{n+1}}$, ce que l'on fait :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \sqrt{a_{n+1} b_n} - a_{n+1} \\ &= \sqrt{a_{n+1}} (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}) \\ &= \sqrt{a_{n+1}} (\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}}) \\ &= \sqrt{a_{n+1}} \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_{n+1}})(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \quad \text{quantité conjuguée avec } \sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}} > 0 \\ &= \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} (b_n - a_n) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} (b_n - a_n).$$

(b) **En déduire que :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

Par récurrence : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: " $a_n < b_n$ ".

- Initialisation : $a_0 = 1 < 2 = b_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, donc $b_n - a_n > 0$.

On a alors avec la question précédente : $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} (b_n - a_n) > 0$ par produit de

termes strictement positifs ($\sqrt{a_{n+1}} > 0$ et $\sqrt{b_n} > 0$ d'après Q1).

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion : ...

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

(c) **Montrer alors que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{a_n + b_n - 2a_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} > 0$$

d'après la question précédente.

Ainsi, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(d) **Montrer que :** $b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$, puis établir la stricte décroissance de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n} \iff b_{n+1}^2 = a_{n+1} b_n \iff b_n = \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} \quad \text{car } a_{n+1} > 0$$

On a alors :

$$b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}} = b_{n+1} \left(1 - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = b_{n+1} \frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_{n+1}} < 0$$

car $a_n < b_n$ d'après la question 3b, $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$.

Ainsi, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

4. (a) **A l'aide de la question 3a, établir que :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$.

D'après la question 3b, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n - a_n > 0$.

Pour l'autre inégalité, on raisonne par récurrence : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: " $b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$ ".

- Initialisation : $b_0 - a_0 = 1 \leq \frac{1}{2^0} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, donc $b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$.

On fait apparaître $b_{n+1} - a_{n+1}$ à l'aide de la question 3a : $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n)$.

$$b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} \iff \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}(b_n - a_n) \leq \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})} \frac{1}{2^n} \quad \text{produit de termes positifs}$$

$$\iff b_{n+1} - a_{n+1} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}})}}_{\leq 1} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\iff b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion : ...

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$.

- (b) **En déduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée ℓ vérifiant : $a_n \leq \ell \leq b_n$.**
On a vu que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et d'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite notée ℓ .

Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, ℓ vérifie $a_n \leq \ell$. De même $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante donc $\ell \leq b_n$.

Finalement, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée ℓ vérifiant : $a_n \leq \ell \leq b_n$.

- (c) **Écrire un programme Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à moins de 10^{-3} près ?**

D'après la relation $a_n \leq \ell \leq b_n$, la limite ℓ appartient à l'intervalle $[a_n, b_n]$. Il suffit donc que la longueur de cet intervalle soit inférieure à 10^{-3} pour que a_n (ou b_n) soit une valeur approchée de ℓ à moins de 10^{-3} près. On va donc calculer les termes jusqu'à ce que $b_n - a_n < 10^{-3}$.

```
1 a, b = 1, 2
2 while b - a > 10**(-3) :
3     a = (a+b)/2
4     b = (a*b)**(1/2)
5 print(a)
```

- EXERCICE 3

On pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}$.

1. **Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de nombres réels strictement positifs.**

Par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: " u_n existe et $u_n > 0$ ".

- Initialisation : $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $\mathcal{P}(1)$ vraie.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Comme $u_n > 0$ le dénominateur $2(n+1)u_n + 1$ est non nul donc u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$ par quotient de termes strictement positifs.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion : ...

2. **Écrire une fonction Python qui prend comme paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .**

```
1 def suite(n) :
2     u = 1/2 # u_1
3     for k in range(2, n+1) : # de u_2 à u_n
4         u = u / (2*k*u+1) # le calcul de u_k utilise k au dénominateur
5     return u
```

3. **Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$ puis en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite à préciser.**

On a déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{(2n+1)u_n - (2(n+1)u_n + 1)}{(2(n+1)u_n + 1)(2(n+1))} = \frac{-2}{(2(n+1)u_n + 1)(2(n+1))} < 0$$

car $u_n > 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. **Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \frac{1}{u_k}$.**

- (a) **Établir l'égalité : $\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$.**

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{2(k+1)u_k + 1}{u_k} - \frac{1}{u_k} \\ &= \frac{2(k+1)u_k + 1 - 1}{u_k} \\ &= \frac{2(k+1)u_k}{u_k} = 2(k+1) \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}^*, v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$.

- (b) **En déduire la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n(n+1)$.**

Attention : la suite (v_k) n'est pas arithmético-géométrique car n'est pas de la forme $v_{k+1} = av_k + b$ avec a et b constants. Ici, b dépend de k .

Par contre, la relation précédente donne l'idée de faire une somme télescopique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'une part :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_1 = v_n - \frac{1}{u_1} = v_n - 2$$

et d'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 2 = 2 \frac{(n-1)n}{2} + 2(n-1) = n^2 + n - 2$$

Ces deux quantités étant égales d'après la relation de la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n - 2 = n^2 + n - 2$ soit $v_n - 2 = n(n+1)$.

- (c) **Déterminer alors explicitement u_n en fonction de n puis retrouver sa limite.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors : $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- EXERCICE 4 -

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \geq 1$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

1. Dans cette question, on suppose que $u_0 = 2$. Écrire un programme Python qui renvoie une liste contenant tous les termes de la suite entre 0 et 100.

- Version avec append

```
1 u = 2      # u0=2
2 L = [2]    # liste qui va contenir les termes de la suite
3 for k in range(1,101) :
4     u = u**2 + 2/u      # calcul du terme suivant
5     L.append(u)         # stockage dans L
6 print(L)
```

- Version avec np.zeros

```
1 import numpy as np      # on importe le module numpy
2
3 L = np.zeros(101)       # création d'une liste contenant 101 "0"
4 u = 2                   # u0=2
5 L[0] = 2                # on range u0 dans la case 0
6 for k in range(1,101) : # Attention à la gestion des indices
7     u = u**2 + 2/u      # calcul du terme suivant
8     L[k] = u            # stockage dans L au bon endroit
9 print(L)
```

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.

Par récurrence.

- Initialisation. u_0 est bien défini et $u_0 \geq 1$.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \geq 1$. Comme $u_n \geq 1$, u_n est non nul donc on peut diviser par u_n donc $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{u_n}$ est bien défini.
De plus, on a :

$$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{2}{u_n} \geq u_n^2 \quad \text{car } u_n \geq 1$$
$$u_{n+1} \geq 1^2 = 1 \quad \text{car par HR } u_n \geq 1$$

- Conclusion. ...

3. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout entier n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{2}{u_n} - u_n = u_n(u_n - 1) + \frac{2}{u_n} \geq 0$$

par produit et somme de termes positifs (car $u_n - 1 \geq 0$ d'après la question précédente).
Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. Prouver par l'absurde que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.

Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .
Comme $u_n \geq 1$, on a : $\ell \geq 1$.

De plus, cette limite ℓ vérifie la relation : $\ell = \ell^2 + \frac{2}{\ell}$ soit $\ell^3 = \ell^2 - 2$ et donc $\ell^3 < \ell^2$.

Or, $\ell \geq 1 \implies \ell^3 \geq \ell^2$ ce qui est contradictoire avec ce qu'on vient de voir.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas (donc elle diverge vers $+\infty$, étant croissante).

- EXERCICE 5 -

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par : $f(x) = 1 - e^{-x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f .

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $f'(x) = e^{-x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n > 0$.

Par récurrence.

- Initialisation. $u_0 = 1 > 0$.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n > 0$. On a :

$$u_n > 0 \iff f(u_n) > f(0) = 0 \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+$$
$$\iff u_{n+1} > 0$$

- Conclusion. ...

3. Calculer u_2 puis étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Comme f est croissante, il faut penser à la méthode par récurrence. Ici, c'est guidé par l'énoncé. Il faut alors comparer u_2 et u_1 pour conjecturer la monotonie.

Ici, $u_2 = 1 - e^{-1} < 1 = u_1$ donc on pose pour $n \geq 1$: $\mathcal{P}(n) : u_{n+1} < u_n$.

- Initialisation. $u_2 = 1 - e^{-1} < 1 = u_1$.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_{n+1} < u_n$. On a :

$$u_{n+1} < u_n \iff f(u_{n+1}) < f(u_n) = 0 \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+$$
$$\iff u_{n+2} < u_{n+1}$$

- Conclusion. ...

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

On pourra étudier la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

- Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.
- Comme f est continue, la limite ℓ vérifie la relation : $\ell = f(\ell)$ soit $\ell = 1 - e^{-\ell}$ soit $1 - e^{-\ell} - \ell = 0$.
On étudie la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$, dérivable.

$$g'(x) = e^{-x} - 1 > 0 \iff e^{-x} > 1 \iff -x > 0 \iff x < 0$$

Ainsi, g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 0]$ (car $g(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} g(x) = -\infty$).

Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $x = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et donc $1 - e^{-\ell} - \ell = 0 \iff \ell = 0$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- EXERCICE 6 -

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$.

Par récurrence.

- Initialisation. $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_n \leq 1$. On a :

$$0 \leq u_n \leq 1 \iff 1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2 \quad \text{la fonction carrée étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+$$
$$\iff \ln(1) \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2) < 1 \quad \text{la fonction } \ln \text{ étant strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$
$$\iff 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

- Conclusion. ...

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

- (a) **Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0, 1]$ et montrer que $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.**

La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ et on a pour tout x de $[0, 1]$:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = \frac{-(1-x)^2}{1+x^2} \leq 0$$

ce qui donne, avec $f(0) = 0$:

x	0	1
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	$\ln(2) - 1$

f est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[\ln(2) - 1, 0]$. Ainsi, f est négative sur $[0, 1]$ et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x = 0$ sur $[0, 1]$.

- (b) **En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.**

Comme $0 \leq u_n \leq 1$, on peut poser $x = u_n$ dans la question précédente. On a alors :

$$f(u_n) \leq 0 \implies \ln(1 + u_n^2) - u_n \leq 0 \implies u_{n+1} - u_n \leq 0$$

donc la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

- (c) **Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.**

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.
- Comme $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est continue, la limite ℓ vérifie la relation : $\ell = \ln(1 + \ell^2)$ soit $\ln(1 + \ell^2) - \ell = 0$ soit $f(\ell) = 0$.
Or, $f(\ell) = 0 \iff \ell = 0$ d'après la question précédente. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. (a) **Justifier pour tout réel $x \geq 0$, l'inégalité : $\ln(1 + x) \leq x$.**

Posons $h : x \mapsto \ln(1 + x) - x$.

h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, on a :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0 \quad \text{car } -x \leq 0 \text{ et } 1+x > 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

Donc la fonction h est décroissante sur $[0, +\infty[$. Elle est donc majorée par $h(0) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $h(x) \leq 0$ soit : $\forall x \geq 0, \ln(1 + x) \leq x$.

- (b) **Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leq u_n^2$.**

Comme $u_n^2 \geq 0$, on peut poser $x = u_n^2$ dans la question précédente. On a alors :

$$\ln(1 + u_n^2) \leq u_n^2 \quad \text{soit} \quad u_{n+1} \leq u_n^2$$

- (c) **En déduire pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité : $u_n \leq (\ln 2)^n$.**

Par récurrence.

- Initialisation. $u_0 = 1 \leq (\ln 2)^0 = 1$.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \leq (\ln 2)^n$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n^2 \quad \text{d'après la question précédente} \\ \iff u_{n+1} &\leq u_n^2 \leq ((\ln 2)^n)^2 \quad \text{par HR et par croissance de la fonction carrée} \\ \iff u_{n+1} &\leq (\ln 2)^{2n} \leq (\ln 2)^{n+1} \end{aligned}$$

En effet, il s'agit de montrer que $(\ln 2)^{2n} \leq (\ln 2)^{n+1}$ soit $(\ln 2)^{2n-n-1} \leq 1$ soit $(\ln 2)^{n-1} \leq 1$. Cette dernière relation est vérifiée car : $\ln(2) < 1$ et $n \geq 1$ donc $(\ln 2)^{n-1} \leq 1$.

- Conclusion. ...

- (d) **Retrouver la valeur de la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.**

On obtient : $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$.

Or, comme $\ln(2) < 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- (e) **Établir pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité : $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}$.**

On utilise encore la relation $u_n \leq (\ln 2)^n$, ce qui donne par sommation des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\ln 2)^k = \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}$$

4. **Écrire un programme Python permettant d'obtenir le plus petit entier n vérifiant $u_n < 10^{-4}$.**

```
1 from math import log
2
3 n = 0          # On retient l'indice
4 u = 1          # u0=1
5 # tant que la valeur de u n'est pas < à 10^(-4),
6 # on calcule le terme suivant
7 while u >= 10**(-4) :
8     u = log(1+u**2)    # Calcul du terme suivant
9     n = n+1            # On augmente l'indice
10 print(n)
```

- EXERCICE 7 -

On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par : $f(x) = 1 - e^{-x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Montrer que pour tout réel x : $e^x \geq x + 1$ et que l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$.**

Pour tout réel x , on a : $e^x \geq x + 1 \iff e^x - x - 1 \geq 0$.

- Méthode 1 : par inégalité de convexité.

La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier sa tangente en 0 d'équation $y = x + 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x \geq x + 1$.

- Méthode 2 : par étude de fonction.

Posons $g : x \mapsto e^x - x - 1$, fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

Comme $g(0) = 0$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		0	

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) \geq 0$ soit $e^x \geq x + 1$.

De plus, g est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g(0) = 0$.

Donc le théorème de la bijection assure qu'il n'y a qu'une seule solution à l'équation $g(x) = 0$, à savoir 0.

Ainsi, $e^x = x + 1$ si et seulement si $x = 0$.

2. **Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n > 0$.**

Par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $P(n) : u_n > 0$.

- Initialisation. $u_1 = 1 > 0$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $u_n > 0$.

On a alors :

$$u_n > 0 \implies -u_n < 0 \implies e^{-u_n} < 1 \implies 1 - e^{-u_n} > 0 \implies u_{n+1} > 0$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

3. **A l'aide de la question 1, étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$.

Or, d'après la première question, on a pour tout x réel : $e^x \geq x + 1$ soit $1 - e^x \leq -x$.

Ainsi, pour $x = -u_n$, on obtient :

$$1 - e^{-u_n} \leq -(-u_n) = u_n$$

soit $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

4. **En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.**

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite ℓ .

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, cette limite ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff 1 - e^{-\ell} = \ell \\ &\iff e^{-\ell} = 1 - \ell \\ &\iff e^t = 1 + t \quad \text{en posant } t = -\ell \\ &\iff t = 0 \quad \text{d'après la question 1} \end{aligned}$$

Ainsi, $t = -\ell = 0$ donc $\ell = \lim u_n = 0$. Finalement, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

5. **Compléments.**

- (a) **A l'aide de la question 1, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1+u_n}$ puis que $\frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$.**

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 1 - e^{-u_n} = 1 - \frac{1}{e^{u_n}}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'après la question 1 : $e^x \geq x + 1$. Ainsi, pour $x = u_n$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{u_n} \geq u_n + 1 &\iff \frac{1}{e^{u_n}} \leq \frac{1}{1 + u_n} \quad \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff 1 - \frac{1}{e^{u_n}} \geq 1 - \frac{1}{1 + u_n} \\ &\iff 1 - e^{-u_n} \geq \frac{u_n}{1 + u_n} \\ &\iff u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n} \end{aligned}$$

puis par passage à l'inverse (décroissance sur $\mathbb{R}_+^*$), on obtient :

$$u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n} \iff \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1 + u_n}{u_n} \iff \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{u_n} + 1 \iff \frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n}$$

- (b) **Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \geq \frac{1}{n}$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $P(n) : u_n \geq \frac{1}{n}$.

- $u_1 = 1 \geq \frac{1}{1}$ donc $P(1)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $u_n \geq \frac{1}{n}$. On a alors :

$$\begin{aligned} u_n \geq \frac{1}{n} &\iff \frac{1}{u_n} \leq n \\ &\iff 1 + \frac{1}{u_n} \leq n + 1 \\ &\iff \frac{1}{u_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq n + 1 \quad \text{d'après la question précédente} \\ &\iff u_{n+1} \geq \frac{1}{n+1} \quad \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- D'après le principe de récurrence, on peut conclure : $u_n \geq \frac{1}{n}$.

- EXERCICE 8 -

On considère la fonction F de X définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $F(x) = 1 - (1+x)e^{-x}$.

1. **Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution m et vérifier que $1 \leq m \leq 2$.**

On donne : $0,3 < e^{-1} < 0,4$ et $0,1 < e^{-2} < 0,15$.

- F est continue sur $]0, +\infty[$.

- F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$F'(x) = -(e^{-x} + (1+x)(-e^{-x})) = xe^x > 0$$

donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+$ (car F est continue sur $\mathbb{R}_+$).

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ par C.C donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ par somme.

- $F(0) = 0$.

Donc, F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

De plus, $\frac{1}{2} \in [0, 1[$, donc l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution m sur $[0, +\infty[$.

D'autre part, on a : $F(1) = 1 - 2e^{-1} < 1 - 2 \times 0,3 < \frac{1}{2}$ et $F(2) = 1 - 3e^{-2} > 1 - 3 \times 0,1 > \frac{1}{2}$, ce qui donne

$$F(1) \leq F(m) \leq F(2) \iff 1 \leq m \leq 2 \quad \text{car } F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+$$

Ainsi, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution m et vérifier que $1 \leq m \leq 2$.

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m .

On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1, 2]$ par : $g(x) = \ln(2x + 2)$.

On considère également la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = g(u_{n-1}) \quad \text{pour } n > 0 \end{cases}$

2. **En revenant à la définition de m , montrer que $g(m) = m$.**

On a :

$$\begin{aligned} F(m) = \frac{1}{2} &\iff 1 - e^{-m}(1+m) = \frac{1}{2} \\ &\iff e^{-m}(1+m) = \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{1+m}{e^m} = \frac{1}{2} \\ &\iff e^m = 2(1+m) \\ &\iff m = \ln(2+2m) \\ &\iff g(m) = m \end{aligned}$$

Ainsi, $F(m) = \frac{1}{2} \iff g(m) = m$.

3. **Montrer que si x appartient à $[1, 2]$ alors : $g(x)$ appartient à $[1, 2]$ et $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.**

La fonction g est dérivable sur $[1, 2]$ et on a : $g'(x) = \frac{2}{2x+2} = \frac{1}{x+1} > 0$ donc g est strictement croissante sur $[1, 2]$.

Ainsi, on a : $\forall x \in [1, 2], 1 \leq x \leq 2 \iff \ln(4) = g(1) \leq g(x) \leq g(2) = \ln(6)$.

Or, on a :

- $\ln(4) > 1 \iff 4 > e^1 \iff e^{-1} > \frac{1}{4}$ ce qui est vrai car $e^{-1} > 0,3$.

- $\ln(6) < 2 \iff 6 < e^2 \iff e^{-2} < \frac{1}{6}$ ce qui est vrai car $e^{-2} < 0,15$.

Ainsi, on a bien : $\boxed{\forall x \in [1, 2], \ g(x) \in [1, 2]}.$

D'autre part, g' est clairement décroissante sur $[1, 2]$.

Ainsi, on a : $\forall x \in [1, 2], \ 1 \leq x \leq 2 \iff \frac{1}{3} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$ soit $\boxed{|g'(x)| \leq \frac{1}{2}}.$

4. **Montrer alors que pour tout entier n :** $|u_{n+1} - m| \leq \frac{1}{2}|u_n - m|.$

On va appliquer l'IAF à la fonction g entre m et u_n . Vérifions les hypothèses.

- La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, 2]$ et pour tout $x \in [1, 2]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$
- On a $m \in [1, 2]$ et on montre facilement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, 2]$. En effet, si $u_n \in [1, 2]$ alors $u_{n+1} = g(u_n) \in [1, 2]$ car on a vu à la question précédente que $g([1; 2]) \subset [1; 2]$.

On peut donc appliquer l'IAF entre m et u_n , ce qui donne :

$$|g(u_n) - g(m)| \leq \frac{1}{2}|u_n - m| \quad \text{soit} \quad |u_{n+1} - m| \leq \frac{1}{2}|u_n - m|$$

5. **En déduire que pour tout entier n :** $|u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

- Initialisation : $|u_0 - m| = |1 - m| \leq 1$ car $m \in [1, 2]$ donc $|u_0 - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. D'après la question précédente on a

$$|u_{n+1} - m| \leq \frac{1}{2} \underbrace{|u_n - m|}_{\leq (1/2)^n \text{ par HR}}$$

ce qui donne avec l'HR :

$$|u_{n+1} - m| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Finalement, on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$

6. **Quelle est la limite de la suite u_n ?**

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $0 < 1/2 < 1$), on en déduit d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - m| = 0 \text{ et donc que } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = m}.$$

7. **Écrire un programme en Python donnant une valeur approchée de m à 10^{-2} près.**

Comme on ne connaît par m , on va calculer les valeurs de u jusqu'à ce que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.01$. La valeur de u

obtenue sera bien une valeur approchée de m à 10^{-2} près car on aura : $|u_n - m| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.01$.

```
1 n = 0
2 u = 1
3 while (1/2)**n > 0.01 :
4     n = n+1
5     u = np.log(2*u+2)
6 print(u)
```

- EXERCICE 9 -

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$

1. (a) **Déterminer pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.**

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car $1+e^x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc, f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $f'_n(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$
 - $f''_n(x) = -\frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = -\frac{e^x(1+e^x)((1+e^x)-2e^x)}{(1+e^x)^4}$, soit $f''_n(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$
- (b) **En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$.**

• Méthode 1 : On cherche directement le signe de f' .

On a pour tout réel x :

$$f'_n(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n = \frac{-e^x + n(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{(2n-1)e^x + n + e^{2x}}{(1+e^x)^2} > 0 \quad \text{car} \quad n \geq 1 \implies 2n-1 \geq 1 > 0$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f'_n(x) > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Méthode 2 : On peut se demander pourquoi l'énoncé nous fait calculer f'' . On peut alors chercher les variations puis le signe de f' à l'aide du signe de f'' . C'est plus long, pas nécessaire dans cet exercice mais je le donne pour la méthode.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$. Donc f''_n est du signe de $e^x - 1$. Or :

$$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

On en déduit donc le tableau de variations de f'_n suivant puis le signe de f'_n en remarquant que pour $n \geq 1$, on a : $f'_n(0) = n - \frac{1}{4} > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$x-1$		-	0	+
$f_n''(x)$		-	0	+
$f_n'(x)$	$n - \frac{1}{4}$			
$f_n'(x)$	+			
$f_n(x)$	$-\infty$			$+\infty$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f'_n(x) > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ par somme et quotient.
 - On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ par somme et quotient car $\lim_{x \rightarrow -\infty} nx = -\infty$ car $n > 0$.
2. (a) **Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .**
La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (d'après les calculs de limites précédents).
De plus, $0 \in \mathbb{R}$, donc d'après le théorème de bijection monotone 0 admet donc un unique antécédent par f_n , que l'on notera u_n , c'est-à-dire que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$.

(b) **Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$ puis déterminer la limite de la suite (u_n) .**

Il s'agit d'une suite implicite. On travaille sur les images. On a :

- $f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$
- $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < 0$, car $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 = \frac{-e^{-1/n}}{1+e^{-1/n}} < 0$.
- $f_n(u_n) = 0$

On a donc :

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$$

et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0$$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- (c) **Montrer que :** $f_{n+1}(u_n) = u_n < 0$, puis en déduire le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Par définition de u_n , on a : $f_n(u_n) = 0$, soit : $\frac{1}{1 + e^{u_n}} + nu_n = 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= \frac{1}{1 + e^{u_n}} + (n+1)u_n \\ &= \frac{1}{\underbrace{1 + e^{u_n}}_{f_n(u_n)=0}} + nu_n + u_n \\ &= u_n \end{aligned}$$

et comme $u_n < 0$, on a bien : $f_{n+1}(u_n) = u_n < 0$.

Pour obtenir les variations de la suite, on cherche à comparer u_n et u_{n+1} . On a va donc utiliser la définition de u_{n+1} : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, ce qui donne en partant du résultat précédent :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &< 0 \\ \Rightarrow f_{n+1}(u_n) &< f_{n+1}(u_{n+1}) \\ \Rightarrow u_n &< u_{n+1} \quad \text{car } f_{n+1} \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

- (d) **En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \sim -\frac{1}{2n}$.**

Il s'agit de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{-\frac{1}{2n}} = 1$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2nu_n = 1$.

Par définition de u_n , on a : $f_n(u_n) = 0$ soit : $\frac{1}{1 + e^{u_n}} + nu_n = 0$ soit $\frac{1}{1 + e^{u_n}} = -nu_n$ et donc : $-2nu_n = \frac{2}{1 + e^{u_n}}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, donc par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + e^{u_n}} = 1$.

On a donc bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2nu_n = 1$, soit : $u_n \sim -\frac{1}{2n}$.

- EXERCICE 10 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose d'étudier les racines de l'équation (E_n) suivante pour $x > 0$.

$$(E_n) : \ln x + x = n$$

1. **Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f : x \mapsto \ln x + x$.**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on obtient :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2. **En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique racine x_n . Donner la valeur de x_1 .**

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \in] -\infty, +\infty[$ donc l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet une unique racine x_n .

De plus, $\ln(1) + 1 = 1$ donc par unicité, $x_1 = 1$.

3. **Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante puis que $x_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.**

La suite étant définie implicitement, on doit passer par les images. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} n+1 > n &\iff f(x_{n+1}) > f(x_n) \quad \text{par définition de la suite } (x_n) : f(x_n) = n \\ &\iff x_{n+1} > x_n \quad \text{par stricte croissance de la fonction } f \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Comme $x_1 = 1$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geq 1$.

4. (a) **Justifier que f est bijective et donner le tableau de variation de f^{-1} .**

D'après la première question, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc bijective et sa bijection réciproque f^{-1} a les mêmes variations que f . On a donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$+\infty$

- (b) **En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.**

On a : $f(x_n) = n$ donc $x_n = f^{-1}(n)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(n) = +\infty$ d'après le tableau de variations de la question précédente.

5. (a) **En utilisant (sans le redémontrer) que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x < x$, prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.**

Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(x_n) + x_n = n$ donc $x_n = n - \ln(x_n)$.

• Comme $x_n \geq 1$, on a : $\ln(x_n) \geq 0$ donc $x_n = n - \ln(x_n) \leq n$.

• On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} \ln(x_n) &< x_n \quad \text{valable d'après l'énoncé car } x_n > 0 \\ \iff \ln(x_n) + x_n &< x_n + x_n \\ \iff n &< 2x_n \quad \text{par définition de la suite } (x_n) : \ln(x_n) + x_n = n \end{aligned}$$

ce qui donne : $x_n \geq \frac{n}{2}$.

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.

- (b) **En déduire que $\frac{\ln(x_n)}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.**

D'après la relation précédente, on a, par croissance de la fonction $\ln$:

$$\ln\left(\frac{n}{2}\right) \leq \ln(x_n) \leq \ln(n)$$

donc

$$\frac{\ln(n) - \ln(2)}{n} \leq \frac{\ln(x_n)}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n) - \ln(2)}{n} = 0$ par croissance comparées.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{n} = 0$.

- (c) **En déduire que : $x_n \sim n$.**

Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(x_n) + x_n = n$$

donc

$$\frac{x_n}{n} = \frac{n - \ln(x_n)}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n} \longrightarrow 1$$

d'après la question précédente. Ainsi, $x_n \sim n$.

- (d) **Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$.**

Par définition, on a :

$$x_n = n - \ln(x_n)$$

et

$$x_{n+1} = n + 1 - \ln(x_{n+1})$$

donc par différence, on obtient :

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 - \ln(x_{n+1}) - (n - \ln(x_n)) = 1 - \ln(x_{n+1}) + \ln(x_n) = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} - x_n = 1 - \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$.

(e) **En déduire la limite de $x_{n+1} - x_n$.**

On a vu que : $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$, ce qui donne : $x_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} n + 1$.

Donc par quotient, on a :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ puis par continuité de la fonction $\ln$ que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 0$.

Finalement, en utilisant le résultat de la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 1$$

6. **Compléments : On pose :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n - x_n}{\ln n}$.

(a) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{n - x_n}{\ln n} - 1 \\ &= \frac{n - x_n - \ln(n)}{\ln n} \\ &= \frac{\ln(x_n) - \ln(n)}{\ln n} \quad \text{par définition de } x_n : x_n + \ln(x_n) = n \\ &= \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \end{aligned}$$

(b) **Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?**

On a vu que : $x_n \sim n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$;

Par composition (de limites) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = 0$ et enfin par quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

(c) **Montrer que $\frac{x_n}{n} = 1 - \frac{u_n \ln(n)}{n}$ puis en déduire que :** $u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n - x_n}{\ln n} \\ \Rightarrow \ln(n) u_n &= n - x_n \\ \Rightarrow x_n &= n - \ln(n) u_n \\ \Rightarrow \frac{x_n}{n} &= 1 - \frac{u_n \ln(n)}{n} \end{aligned}$$

Pour obtenir un équivalent de $u_n - 1$, on va utiliser la relation $u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n}$ obtenue plus haut.

D'après la question précédente, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ donc $\frac{u_n \ln(n)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n \ln(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par CC.

On a donc : $\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n \ln(n)}{n}\right) \sim -\frac{u_n \ln(n)}{n}$.

On obtient enfin :

$$u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln n} \sim \frac{-\frac{u_n \ln(n)}{n}}{\ln(n)} = \frac{-u_n}{n} \sim -\frac{1}{n} \quad \text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

(d) **En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a :** $x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Comme $u_n - 1 \sim -\frac{1}{n}$, on peut écrire au voisinage de 0 :

$$u_n - 1 = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{soit} \quad \frac{n - x_n}{\ln(n)} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc $n - x_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$ soit finalement : $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

- EXERCICE 11 -

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = 2xe^x$.

1. **Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.**

On note f^{-1} la bijection réciproque de f .

La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ comme produit de fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) = 2(x+1)e^x > 0$$

Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ donc elle réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 2e]$ (car $f(0) = 0$ et $f(1) = 2e$).

2. **Donner les tableaux des variations complets de f et de f^{-1} .**

On obtient les tableaux des variations suivants.

x	0	1
$f(x)$	0	$2e$

x	0	$2e$
$f^{-1}(x)$	0	1

3. **Montrer qu'il existe dans $[0; 1]$ un unique réel noté α tel que $\alpha e^\alpha = 1$ et montrer que $\alpha \neq 0$.**

On commence par remarquer que : $xe^x = 1 \iff 2xe^x = 2 \iff f(x) = 2$.

Ainsi, α est solution de l'équation $xe^x = 1$ ssi α est solution de l'équation $f(x) = 2$.

Or, f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; 2e]$.

De plus, $2 \in [0; 2e]$.

Donc il existe un unique réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $f(\alpha) = 2$ donc il existe un unique réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$.

Enfin, $\alpha \neq 0$ car $0e^0 \neq 1$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4. **Montrer que pour tout entier naturel n , u_n existe et $u_n \in]0, 1]$.**

Par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $\mathcal{P}(n)$: " u_n existe et $u_n \in]0, 1]$ ".

• Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \alpha \in]0, 1]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

Par HR, $u_n \in]0, 1]$ donc u_n est dans le domaine de définition de f^{-1} donc $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ existe.

De plus, comme f^{-1} est strictement croissante, on a :

$$0 < u_n \leq 1 \implies f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(1) \implies 0 < u_{n+1} \leq f^{-1}(1) \leq 1 \quad \text{car } f^{-1}(1) \leq f^{-1}(2e) = 1$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• D'après le principe de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_n existe et $u_n \in]0, 1]$.

5. (a) **Montrer que pour tout** $x \in [0; 1]$: $f(x) - x \geq 0$.

Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.

Soit $x \in [0; 1]$. On a : $f(x) - x = x(2e^x - 1)$.

Or,

$$x \geq 0 \implies e^x \geq 1 \implies 2e^x - 1 \geq 1 \implies x(2e^x - 1) \geq 0$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; 1]$: $f(x) - x \geq 0$.

De plus, comme $2e^x - 1 \geq 1 > 0$, on a : $f(x) - x = 0 \iff x = 0$.

- (b) **En déduire que la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est strictement décroissante.**

D'après la question précédente, on a : $f(x) - x > 0$ pour tout $x \in]0, 1]$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1]$ d'après Q 4, donc en choisissant $x = u_n$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(u_n) - u_n > 0 \quad \text{soit} \quad f(u_n) > u_n \quad \text{soit} \quad u_n > f^{-1}(u_n) = u_{n+1}$$

car f^{-1} est croissante. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- (c) **Montrer que la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est convergente et qu'elle a pour limite 0.**

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite ℓ .

Comme la fonction f est continue, cette limite ℓ vérifie : $\ell = f^{-1}(\ell)$ soit $f(\ell) = \ell$ soit $f(\ell) - \ell = 0$.

Or, on a vu en Q 5a que $f(x) - x = 0 \iff x = 0$ donc $\ell = 0$.

Finalement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

6. **On se propose de déterminer** $\lim u_n$ **d'une autre manière. On pose pour tout entier naturel** n : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

- (a) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(u_{n+1}) = 2u_{n+1}e^{u_{n+1}} \quad \text{donc} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} f(u_{n+1})e^{-u_{n+1}}$$

Or, $u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \iff f(u_{n+1}) = u_n$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$.

- (b) **En déduire par récurrence que :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$

Par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note : $\mathcal{P}(n)$: " $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$ ".

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \alpha$ et d'autre part, $\frac{e^{-S_0}}{2^0} = e^{-u_0} = e^{-\alpha} = \alpha$ car $\alpha e^\alpha = 1$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

On a, d'après la question précédente : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$, et, par HR, $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$, ce qui donne :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{e^{-S_n}}{2^n} e^{-u_{n+1}} = \frac{e^{-S_n - u_{n+1}}}{2^{n+1}} = \frac{e^{-S_{n+1}}}{2^{n+1}} \quad \text{car} \quad S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- D'après le principe de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$.

- (c) **Montrer que :** $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **puis conclure.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, par somme de termes positifs :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \geq 0 \quad \text{donc} \quad e^{-S_n} \leq 1 \quad \text{donc} \quad u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

De plus, on a vu que $0 \leq u_n$, ce qui donne : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ainsi comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- EXERCICE 12 -

On admet que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge vers le réel** ℓ , **alors on a :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **définie par la donnée de** $u_0 = 0$ **et par la relation, valable pour tout entier naturel** n , $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) **Montrer que, pour tout entier naturel** n **on a**, $0 \leq u_n < 1$.

Par récurrence.

- Initialisation. $u_0 = 0 \in [0, 1[$.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_n < 1$. On a alors :

$$0 \leq u_n < 1 \iff 0 \leq u_n^2 < 1 \iff 1 \leq u_n^2 + 1 < 2 \iff 0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{u_n^2 + 1}{2} < 1$$

soit $0 \leq u_{n+1} < 1$

- Conclusion. ...

- (b) **Étudier les variations de la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 + 2u_n}{2} = \frac{(u_n + 1)^2}{2} \geq 0$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- (c) **Déduire des questions précédentes que la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge et donner sa limite.**

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie : $\ell =$

$$\frac{\ell^2 + 1}{2} \quad (\text{car } x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2} \text{ est continue}).$$

Or, on a :

$$\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2} \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \iff (\ell^2 - 1) = 0 \iff \ell = 1$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

2. **Pour tout entier naturel** n **on pose**, $v_n = 1 - u_n$.

- (a) **Montrer que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) &= \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{1 - \frac{u_n^2 + 1}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{1 - u_n^2}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} \\ &= \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1 + u_n}{(1 - u_n)(1 + u_n)} \\ &= \frac{2 - 1 - u_n}{1 - u_n^2} \\ &= \frac{1 - u_n}{(1 - u_n)(1 + u_n)} = \frac{1}{1 + u_n} \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{2} \quad \text{car } u_n \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$.

- (b) **Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de** v_n **lorsque** n **tend vers** $+\infty$.

Le résultat donné en début d'énoncé faisant apparaître une somme, on pense à utiliser des sommes

télescopiques puisque $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$ s'écrit comme la différence de deux termes consécutifs.

Ainsi, on a en posant $a_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}$:

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$, le résultat admis nous dit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{v_{j+1}} - \frac{1}{v_j} = \frac{1}{2}$$

En simplifiant la somme télescopique, cela donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n v_n} - \frac{1}{n v_0} = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{n}}{v_n} = 1$$

résultat qui montre que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

(c) **En déduire que** $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Comme $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$, on a : $v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ soit $1 - u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ soit $u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

- EXERCICE 13 -

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. (a) **Étudier les variations de la fonction** $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son-tableau de variations, en précisant les limites).

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de dénominateur non nul et on a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{-(x+1)e^{-x}}{x^2} < 0 \text{ car } x+1 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, on a :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ par quotient.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ par quotient.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

(b) **Vérifier que chaque terme de la suite** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est correctement défini et strictement positif.**

Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n > 0$.

- $u_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai.
Comme $u_n > 0$, $u_n \in D_f$ donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.

D'autre part, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n} > 0$ par quotient de termes strictement positifs donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.

- Conclusion

2. **Pour** $x \in [0, +\infty[$, **on pose** : $g(x) = e^{-x} - x^2$.

(a) **Démontrer que la fonction** $g : x \mapsto g(x)$ **réalise une bijection de** $[0, +\infty[$ **sur** $] -\infty, 1]$.

La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a pour tout $x \geq 0$:

$$g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

Ainsi, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(0) [=] -\infty, 1]$.

(b) **En déduire que l'équation** $f(x) = x$, **d'inconnue** x , **possède une unique solution dans l'intervalle** $]0, +\infty[$, **que l'on notera** α .

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$f(x) = x \iff \frac{e^{-x}}{x} = x \iff e^{-x} = x^2 \iff e^{-x} - x^2 = 0 \iff g(x) = 0$$

Or, d'après la question précédente, g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1[$ et $0 \in] -\infty, 1[$ donc l'équation $g(x) = 0$ (et donc $f(x) = x$) admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$.

(c) **Justifier que** $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. **On rappelle que** $e \approx 2,7$.

On a :

$$\bullet \quad g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^{1/e}} - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - e^{1/e}}{e^{1/e}e^2}. \text{ Or : } e > 2 \implies 1/e < 2 \implies e^{1/e} < e^2 \text{ donc } g\left(\frac{1}{e}\right) > 0 = g(\alpha).$$

$$\bullet \quad g(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0 = g(\alpha)$$

Ainsi, on a par stricte décroissance de g :

$$g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha) > g(1) \iff \frac{1}{e} < \alpha < 1$$

3. (a) **Démontrer que l'on a** : $u_2 > u_0$.

On a : $u_0 = 1$ donc $u_1 = f(u_0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et

$$u_2 = f(u_1) = \frac{e^{-\frac{1}{e}}}{\frac{1}{e}} = ee^{-\frac{1}{e}} = e^{1-\frac{1}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}} > 1 = u_0$$

car $\frac{e-1}{e} > 0$ ($e \approx 2,7 > 1$).

(b) **En déduire que la suite** $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ **est croissante.**

Par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathcal{P}(n)$: $u_{2n+2} > u_{2n}$.

- $u_2 > u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{2n+2} > u_{2n} &\iff f(u_{2n+2}) < f(u_{2n}) \quad \text{par décroissance de } f \\ &\iff u_{2n+3} < u_{2n+1} \\ &\iff f(u_{2n+3}) > f(u_{2n+1}) \quad \text{par décroissance de } f \\ &\iff u_{2n+4} < u_{2n+2} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.

Ainsi, la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

(c) **Justifier que la suite** $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ **converge.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après la question précédente :

$$u_{2n+2} > u_{2n}$$

donc par décroissance de f , on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2n+2} > u_{2n} \iff f(u_{2n+2}) < f(u_{2n}) \quad \text{soit} \quad u_{2n+3} < u_{2n+1}$$

ce qui montre que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

4. **Pour** $x \in]0, +\infty[$ **on pose** : $h(x) = f \circ f(x)$. **On pose également** $h(0) = 0$.

(a) **Soit** x **un réel strictement positif. Déterminer** $h(x)$.

Pour tout $x > 0$ on a :

$$h(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = xe^{-\frac{e^{-x}}{x} + x} = xe^{-\frac{e^{-x} - x^2}{x}} = xe^{-\frac{g(x)}{x}}$$

(b) **Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.**

- f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $h = f \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composée.
- $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(f(x)) = 0$ par composée car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Comme $h(0) = 0$, h est continue en 0.

Ainsi, h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(c) **Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 2b.**

- $h(0) = 0$ donc 0 est solution de l'équation $h(x) = x$.
- Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff x e^{-\frac{g(x)}{x}} = x \\ &\iff e^{-\frac{g(x)}{x}} = 1 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\iff -\frac{g(x)}{x} = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \\ &\iff x = \alpha \quad \text{d'après la question 2b} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α .

(d) **En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.**

Pour tout $n \geq 0$, posons : $v_n = u_{2n+1}$. Remarquons que pour tout $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = h(u_{2n+1}) = h(v_n)$$

Ainsi, on a : $v_0 = u_1 = \frac{1}{e}$ et pour tout $n \geq 0$: $v_{n+1} = h(v_n)$.

On a déjà vu que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ (qui est la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$) est décroissante et converge vers une limite ℓ . Comme h est continue et que $v_{n+1} = h(v_n)$, cette limite ℓ vérifie : $h(\ell) = \ell$ donc d'après la question précédente $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.

Or, comme la suite est décroissante et que $v_0 = u_1 = \frac{1}{e}$, on a : $\ell \leq \frac{1}{e}$.

Or, on a vu que $\alpha > \frac{1}{e}$ donc $\ell \neq \alpha$ et finalement $\ell = 0$.

5. **La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?**

De même, si on pose : $w_n = u_{2n}$, on a : $w_0 = u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$: $w_{n+1} = h(w_n)$.

Supposons que cette suite soit majorée. Comme elle est croissante (on a déjà vu que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante), elle converge vers une limite ℓ qui vérifie : $h(\ell) = \ell$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.

Or, comme la suite est croissante et que $w_0 = 1$, on a : $\ell \geq 1$ donc $\ell \neq 0$.

Or, on a vu que $\alpha < 1$ donc $\ell \neq \alpha$ également ce qui contredit la convergence.

On en déduit que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Comme cette suite est croissante et non majorée elle admet pour limite $+\infty$.