

- EXERCICE 1 -

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$
2. $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$
3. $\int_1^2 \ln(x) dx$
4. $\int_2^3 \frac{\ln(t)^n}{t} dt$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
5. $\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(t^n+1)^3} dt$
6. $\int_{-1}^1 |x^2 - x| dx$.
7. $\int_{-1}^1 x \sqrt{x^2+1} dx$.
8. $\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}$. Chercher a et b tq : $\frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-1}$.
9. $\int_2^3 \frac{t}{t+1} dt$. Utiliser : $t = t+1-1$.
10. $\int_1^2 \frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} dx$ avec $\theta > 0$.
11. $\int_1^3 x^3 \ln(x) dx$ par IPP
12. $\int_2^3 \frac{1}{t \ln(t)} dt$ par chgt de var : $u = \ln(t)$.

- EXERCICE 2 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g : t \mapsto (1+t) \ln(1+t) - t$.
En déduire la valeur de u_1 .
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
(c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$.
(d) En déduire la limite la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n , la relation suivante, notée $(\star)$:

$$u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n \quad (\star)$$

(On pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \mapsto 1$ est $t \mapsto 1+t$.)

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$.
- (c) En utilisant la relation $(\star)$ et la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$$

- (d) En déduire que : $nu_n \sim_{+\infty} 2(\ln 2)^{n+1}$ puis un équivalent de u_n en $+\infty$.

- EXERCICE 3 -

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} dx$.

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. (a) Étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $h : x \mapsto (1-x)e^x - 1$ puis donner son signe.
(b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.
3. (a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x + \ln(1-x) \leq -\frac{1}{2}x^2$.
(b) En déduire que pour tout entier n : $I_n \leq \int_0^1 e^{-(nx^2)/2} dx$.
(c) Montrer alors à l'aide d'un changement de variable que : $I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du$.
(d) Pour tout entier naturel n , on pose : $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du$. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
(e) On admet que la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ est majorée.
En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

- EXERCICE 4 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
2. Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \ln x$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \ln x$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f .

- EXERCICE 5 -

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation : $f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Établir, à l'aide d'une IPP, que pour tout $k \geq 0$: $f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$.
3. En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis montrer que : $f'_k(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{k+1}{x} f_k(x) = -f_{k+1}(x)$.

- EXERCICE 6 -

On considère les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

1. Montrer que les fonctions F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis étudier les variations de F .
3. Montrer que G est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que $G'(x) = 0$ pour tout $x > 0$.
4. En déduire que G est nulle puis que pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.
5. À l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale définissant F , retrouver le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

- EXERCICE 7 -

1. Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x .

On considère désormais la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

2. Établir que f est impaire.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .
4. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
(b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
(c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
6. (a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} dt$
(b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$.
(c) Conclure que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.
(d) En déduire que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.

- EXERCICE 8 -

Soit x un réel de $]0;1[$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.
2. En intégrant la relation obtenue à la question précédente, montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ puis en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
4. En déduire que la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge et que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

- EXERCICE 9 -

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. Étude de f_n .
 - (a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .
 - (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
 - (c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Étude de la suite (u_n) .
 - (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 - (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) Utiliser la question 2b pour compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .

```
1 from math import exp, sqrt
2 n = 0
3 while ..... :
4     n = .....
5 print (n)
```

- (b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de $\ln 10$.
4. On pose $v_n = u_n - n$.
 - (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
 - (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 , on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
 - (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
 - (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

- EXERCICE 10 -

On pose pour tout entier $n \geq 0$: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$.

1. Calculer I_1 .
2. Établir que pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n , la relation :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$$

- (b) Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis en déduire un équivalent de I_n .

4. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$.

- (a) Établir la relation : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2e} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$ puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

- (b) Donner, sous forme de somme, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n .
- (c) Vérifier que pour tout entier $k \geq 1$, on a : $I_{2k+1} = kI_{2k-1} - \frac{1}{2e}$ puis compléter le script Python suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur de I_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1 n = int(input('entrer la valeur de n : '))
2 I = .....
3 for k in range(1, n+1) :
4     I = .....
5 print (I)
```

- EXERCICE 11 -

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ définie sur $]1, +\infty[$ et on pose pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

1. Déterminer les variations de f puis en déduire que pour tout $k \geq 2$: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$.
2. En déduire que : $\forall n \geq 2, \int_2^n f(t) dt + f(n) \leq v_n \leq \int_2^n f(t) dt + f(2)$.
3. Calculer $\int_2^n f(t) dt$. En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$.
4. Déterminer un équivalent de v_n en $+\infty$.