

- EXERCICE 1 -**Calculer les intégrales suivantes.**

Tous les intégrandes sont continus sur l'intervalle fermé d'intégration donc les intégrales sont bien définies.

1. De la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

2. De la forme $-\frac{1}{2} u' e^u$ ce qui donne :

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{1-e^{-1}}{2}$$

3. Une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ est $x \mapsto x \ln(x) - x$ (à connaître), ce qui donne :

$$\int_1^2 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^2 = 2 \ln(2) - 1$$

4. De la forme $u' u^n$ avec $u = \ln(t)$ ce qui donne :

$$\int_2^3 \frac{\ln(t)^n}{t} dt = \left[\frac{\ln(t)^{n+1}}{n+1} \right]_2^3 = \frac{\ln(3)^{n+1} - \ln(2)^{n+1}}{n+1}$$

5. Rappel : une primitive de $u' u^\alpha$ est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Presque de la forme $\frac{u'}{u^3} = u' u^{-3}$ avec $u = t^n + 1$ ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(t^n+1)^3} dt = \int_0^1 \frac{n t^{n-1} (t^n+1)^{-3}}{n} dt = \left[\frac{(t^n+1)^{-2}}{-2n} \right]_0^1 = \frac{2^{-2} - 1^{-2}}{-2n} = \frac{3}{8n}$$

6. Pour $x \in [-1; 0]$, $x^2 - x \geq 0$ donc $|x^2 - x| = x^2 - x$.
Pour $x \in [0; 1]$, $x^2 - x \leq 0$ donc $|x^2 - x| = -(x^2 - x) = x - x^2$.
Ce qui donne :

$$\int_{-1}^1 |x^2 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \dots = 1$$

7. De la forme $\frac{1}{2} u' u^{1/2}$ avec $u = x^2 + 1$ ce qui donne :

$$\int_{-1}^1 x \sqrt{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} \right]_{-1}^1 = \frac{(2)^{3/2} - (2)^{3/2}}{3} = 0$$

Remarque : Ce résultat était prévisible car la fonction $x \mapsto x \sqrt{x^2+1}$ est impaire donc l'intégrale de cette fonction sur tout intervalle centré en zéro (ici $[-1, 1]$) est nulle. La symétrie de la courbe par rapport au point (0,0) permet de voir que l'aire entre -1 et 0 (comptée négativement car fonction négative sur cet intervalle) et égale à celle entre 0 et 1 .

8. On trouve après mise sous même dénominateur et identification : $\frac{1}{t^2-1} = \frac{-1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)}$.

Ce qui donne :

$$\int_2^3 \frac{1}{t^2-1} dt = -\frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{t+1} dt + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{t-1} dt = -\frac{1}{2} [\ln(t+1)]_2^3 + \frac{1}{2} [\ln(t-1)]_2^3 = \frac{\ln 3 - \ln 4}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2}$$

soit $\int_2^3 \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2}$.

9. On écrit : $\frac{t}{t+1} = \frac{t+1-1}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$ ce qui donne :

$$\int_2^3 \frac{t}{t+1} dt = \int_2^3 1 - \frac{1}{t+1} dt = [t - \ln(t+1)]_2^3 = 3 - \ln(4) - 2 + \ln(3) = 1 - 2 \ln(2) + \ln(3)$$

10. On écrit : $\frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{\theta} x^{-(1+\frac{1}{\theta})}$.

De la forme $\frac{1}{\theta} x^\alpha$ avec $\alpha = -\left(1 + \frac{1}{\theta}\right)$ qui s'intègre en $\frac{1}{\theta} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\theta} \frac{x^{-\frac{1}{\theta}}}{-\frac{1}{\theta}} = -x^{-\frac{1}{\theta}}$ ce qui donne :

$$\int_1^2 \frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} dx = \left[-x^{-\frac{1}{\theta}} \right]_1^2 = \left[\frac{-1}{x^{\frac{1}{\theta}}} \right]_1^2 = 1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{\theta}}}$$

11. On réalise une IPP (dans le but d'éliminer le $\ln$) :
$$\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^3 & v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; 3]$ ce qui donne :

$$\int_1^3 x^3 \ln x dx = \left[\frac{x^4 \ln x}{4} \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{4} dx = \frac{81 \ln 3}{4} - \left[\frac{x^4}{16} \right]_1^3 = \dots$$

12. On effectue le changement de variable : $u = \ln(t)$ $du = \frac{1}{t} dt$.

Enfin, lorsque t varie entre 2 et 3, u varie entre $\ln(2)$ et $\ln(3)$ ce qui donne (il ne faut plus que la variable t apparaisse dans la nouvelle intégrale) :

$$\int_2^3 \frac{1}{t \ln(t)} dt = \int_2^3 \frac{1}{\ln(t)} \frac{1}{t} dt = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{u} du = [\ln(u)]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))$$

- EXERCICE 2 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, et pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$.

1. Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g : t \mapsto (1+t) \ln(1+t) - t$.

En déduire la valeur de u_1 .

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$g'(t) = \ln(1+t) + (t+1) \frac{1}{t+1} - 1 = \ln(1+t)$$

On a : $u_1 = \int_0^1 \ln(1+t) dt$ et le calcul précédent montre que g est une primitive de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$. Ainsi :

$$u_1 = \int_0^1 \ln(1+t) dt = [(t+1) \ln(t+1) - t]_0^1 = 2 \ln 2 - 1$$

2. (a) **Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.**

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} - (\ln(1+t))^n dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 (\ln(1+t))^n (\ln(1+t) - 1) dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a par croissance des fonctions $\ln$ et puissance, on : $(\ln(1+t))^n \geq 0$.
D'autre part, $t \leq 1 \iff \ln(1+t) \leq \ln(2) \iff \ln(1+t) - 1 \leq \ln(2) - 1 < 0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} (\ln(1+t))^n (\ln(1+t) - 1) &\leq 0 \\ \implies \int_0^1 (\ln(1+t))^n (\ln(1+t) - 1) dt &\leq 0 \quad \text{par croissance de l'intégrale avec bornes } 0 < 1 \end{aligned}$$

soit : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- (b) **En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.**

On a, pour tout $t \in [0, 1]$, par croissance des fonctions $\ln$ et puissance, on : $(\ln(1+t))^n \geq 0$ ce qui

donne par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens : $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt \geq 0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

- (c) **Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$.**

$$0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow \ln(1) \leq \ln(1+t) \leq \ln(2) \quad \text{par croissance de la fonction } \ln$$

$$\Rightarrow 0 \leq (\ln(1+t))^n \leq (\ln(2))^n \quad \text{par croissance de la fonction } t \mapsto t^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt \leq \int_0^1 \ln(2)^n dt \quad \text{par croissance de l'intégrale}$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_n \leq \ln(2)^n$$

- (d) **En déduire la limite la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**

Comme $0 < \ln(2) < 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2)^n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

3. (a) **À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n , la relation suivante :**

$$u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n \quad (\star)$$

(On pourra remarquer qu'une primitive de la fonction $t \mapsto 1$ est $t \mapsto 1+t$.)

On a par IPP avec $u : t \mapsto (\ln(1+t))^{n+1}$ (donc $u : t \mapsto (n+1) \frac{1}{1+t} (\ln(1+t))^n$) et $v : t \mapsto 1+t$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \int_0^1 1 \cdot (\ln(1+t))^{n+1} dt \\ &= \left[(1+t) (\ln(1+t))^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) \frac{1}{1+t} (\ln(1+t))^n (1+t) dt \\ &= \left[(1+t) (\ln(1+t))^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) (\ln(1+t))^n dt \\ &= 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n \end{aligned}$$

- (b) **En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$.**

D'après la relation $(\star)$, on a pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n$$

donc

$$(n+1)u_n = 2(\ln 2)^{n+1} - u_{n+1} \leq 2(\ln 2)^{n+1} \quad \text{car } u_{n+1} \geq 0$$

- (c) **En utilisant la relation $(\star)$ et la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :**

$$(n+2)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$$

D'après la relation $(\star)$, on a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} (n+1)u_n &= 2(\ln 2)^{n+1} - u_{n+1} \\ \Rightarrow (n+1)u_n + u_n &= 2(\ln 2)^{n+1} - u_{n+1} + u_n \\ \Rightarrow (n+2)u_n &= 2(\ln 2)^{n+1} + (u_n - u_{n+1}) \\ \Rightarrow (n+2)u_n &\geq 2(\ln 2)^{n+1} \quad \text{car } u_n - u_{n+1} \geq 0 \text{ par décroissance de } (u_n) \end{aligned}$$

- (d) **En déduire que : $nu_n \sim_{+\infty} 2(\ln 2)^{n+1}$ puis un équivalent de u_n en $+\infty$.**

D'après les deux questions précédentes, on a :

$$(n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1} \quad \text{et} \quad (n+2)u_n \geq 2(\ln 2)^{n+1}$$

soit

$$\begin{aligned} 2(\ln 2)^{n+1} - 2u_n &\leq nu_n \leq 2(\ln 2)^{n+1} - u_n \\ \Rightarrow 1 - \frac{2u_n}{2(\ln 2)^{n+1}} &\leq \frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}} \leq 1 - \frac{u_n}{2(\ln 2)^{n+1}} \end{aligned}$$

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{(\ln 2)^{n+1}} = 0$.

On a : $0 \leq (n+1)u_n \leq 2(\ln 2)^{n+1}$ donc $0 \leq \frac{u_n}{(\ln 2)^{n+1}} \leq \frac{2}{n+1}$ donc ; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{(\ln 2)^{n+1}} = 0$ par théorème des gendarmes.

Ainsi, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2u_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{u_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}} = 1$ ce qui prouve que $nu_n \sim_{+\infty} 2(\ln 2)^{n+1}$.

Par quotient, on obtient alors : $u_n \sim_{+\infty} \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n}$.

- EXERCICE 3 -

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} dx$.

1. **Calculer I_0 et I_1 .**

On a :

$$I_0 = \int_0^1 1 dx = 1$$

et par IPP avec $u : x \mapsto 1-x$ et $v : x \mapsto e^x$ fonctions de classe $\mathcal{C}^1$:

$$I_1 = \int_0^1 (1-x) e^x dx = [(1-x)e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + (e-1) = e-2$$

2. (a) **Étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $h : x \mapsto (1-x)e^x - 1$ puis donner son signe.**

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on a : $h'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$ qui est du signe de $-x$. On a alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	-
$h(x)$		0	

ce qui montre que h est négative sur $\mathbb{R}$, son maximum valant 0 d'après le tableau précédent.

- (b) **En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.**

Pour tout entier n , on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{(n+1)x} dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{(n+1)x} - (1-x)^n e^{nx} dx \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} ((1-x)e^x - 1) dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} h(x) dx \end{aligned}$$

Or, pour tout x de $[0, 1]$, on a : $(1-x)^n \geq 0$, $e^{nx} > 0$ et $h(x) \leq 0$ donc : $(1-x)^n e^{nx} h(x) \leq 0$.

Par croissance de l'intégrale (bornes dans le bon sens), on obtient :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} h(x) dx \leq 0$$

donc la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

De plus, pour tout x de $[0, 1]$, on a : $(1-x)^n e^{nx} \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale (bornes dans le bon sens), on a : $I_n \geq 0$.

Ainsi, la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

3. (a) **Montrer que :** $\forall x \in [0, 1], x + \ln(1-x) \leq -\frac{1}{2}x^2$.

Soit $g : x \mapsto x + \ln(1-x) + \frac{1}{2}x^2$, fonction dérivable sur $[0, 1]$. On a pour tout x de $[0, 1]$:

$$g'(x) = 1 + \frac{-1}{1-x} + x = \frac{1-x-1+x(1-x)}{1-x} = \frac{-x^2}{1-x} \leq 0 \quad \text{sur } [0, 1]$$

Ainsi, la fonction g est décroissante sur $[0, 1]$ et comme $g(0) = 0$, on en déduit que $g(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$ et donc que : $x + \ln(1-x) \leq -\frac{1}{2}x^2$ sur $[0, 1]$.

- (b) **En déduire que pour tout entier n :** $I_n \leq \int_0^1 e^{-(nx^2)/2} dx$.

On a :

$$\begin{aligned} x + \ln(1-x) &\leq -\frac{x^2}{2} \\ \Rightarrow nx + n \ln(1-x) &\leq -\frac{nx^2}{2} \quad \text{car } n > 0 \\ \Rightarrow e^{nx + n \ln(1-x)} &\leq e^{-\frac{nx^2}{2}} \quad \text{car exp est croissante} \\ \Rightarrow e^{nx} e^{\ln((1-x)^n)} &\leq e^{-\frac{nx^2}{2}} \\ \Rightarrow e^{nx} (1-x)^n &\leq e^{-\frac{nx^2}{2}} \\ \Rightarrow \int_0^1 e^{nx} (1-x)^n dx &\leq \int_0^1 e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \quad \text{car croissance de l'intégrale} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq \int_0^1 e^{-(nx^2)/2} dx$.

- (c) **Montrer alors à l'aide d'un changement de variable que :** $I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du$.

On pose $u = \sqrt{n}x$, changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$.

On a alors : $du = \sqrt{n} dx$ donc $dx = \frac{1}{\sqrt{n}} du$ et $x \in [0, 1] \Rightarrow u \in [0, \sqrt{n}]$, ce qui donne :

$$\int_0^1 e^{-(nx^2)/2} dx = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} \frac{1}{\sqrt{n}} du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du$$

d'où le résultat avec la question précédente.

- (d) **Pour tout entier naturel n , on pose :** $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du$. **Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ est croissante.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^{\sqrt{n+1}} e^{-u^2/2} du - \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du \\ &= \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} e^{-u^2/2} du \quad \text{d'après la relation de Chasles} \end{aligned}$$

Or, $e^{-u^2/2} > 0$ donc par positivité de l'intégrale (bornes dans le bon sens : $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$), on a :

$$J_{n+1} - J_n = \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} e^{-u^2/2} du \geq 0.$$

Ainsi, la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

- (e) **On admet que la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ est majorée.**

En déduire que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Commençons par remarquer que $I_n \geq 0$ (par positivité de l'intégrale) car l'intégrande $(1-x)^n e^{nx}$ est positif sur $[0, 1]$.

Ainsi, on a avec la relation de la question 3c :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} J_n$$

Or, la suite $(J_n)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée (admis) donc elle converge vers une limite L .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} J_n = 0$.

Ainsi, on a d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

- EXERCICE 4 -

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.**

Rédaction à connaître (valable seulement si la borne du bas est constante et celle du haut est x).

Notons $h : t \mapsto \frac{e^t}{t}$ l'intégrande.

La fonction $f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ est la primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ qui s'annule en 1. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ car dérivable et de dérivée $f' = h$ continue.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = h(x) = \frac{e^x}{x}$.

2. **Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \ln x$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.**

Pour obtenir la minoration par $\ln x$, il faut garder $\frac{1}{t}$ dans l'intégrale. On va donc encadrer e^t .

On a pour $x \geq 1$ (bornes dans le bon sens).

$$\begin{aligned} 1 &\leq t \leq x \\ \Rightarrow e^1 &\leq e^t \leq e^x \quad \text{par croissance de la fonction exp} \\ \Rightarrow \frac{e}{t} &\leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^x}{t} \quad \text{car } t > 0 \\ \Rightarrow \int_1^x \frac{e}{t} dt &\leq \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{e^x}{t} dt \quad \text{par croissance de l'intégrale car } x > 1 \\ \Rightarrow e [\ln(t)]_1^x &\leq \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \leq e^x [\ln(t)]_1^x \\ \Rightarrow e \ln(x) &\leq f(x) \leq e^x \ln(x) \end{aligned}$$

Remarque : L'inégalité de droite est inutile. On peut s'en passer.

Ainsi, on a pour tout $x \geq 1$: $f(x) \geq e \ln(x)$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e \ln(x) = +\infty$, on a par minoration :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. **Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0, 1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \ln x$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.**

On a pour $x \in]0, 1]$: (Attention, bornes dans le mauvais sens !)

- Méthode 1 : on utilise la croissance de l'intégrale avec les bornes dans le mauvais sens.

$$\begin{aligned} x &\leq t \leq 1 \\ \Rightarrow \frac{e^x}{t} &\leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^1}{t} \\ \Rightarrow \int_1^x \frac{e^x}{t} dt &\geq \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_1^x \frac{e}{t} dt \quad \text{on change le sens de l'inégalité car bornes dans le mauvais sens} \\ \Rightarrow e^x [\ln(t)]_1^x &\geq \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq e [\ln(t)]_1^x \\ \Rightarrow e^x \ln(x) &\geq f(x) \geq e \ln(x) \end{aligned}$$

- Méthode 2 : plus long car on force les bornes à être dans le bon sens et on les change ensuite.

$$\begin{aligned}
& x \leq t \leq 1 \\
\Rightarrow & \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^1}{t} \\
\Rightarrow & \int_x^1 \frac{e^x}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{e}{t} dt \quad \text{par croissance de l'intégrale car } x < 1 \\
\Rightarrow & -\int_x^1 \frac{e^x}{t} dt \geq -\int_x^1 \frac{e^t}{t} dt \geq -\int_x^1 \frac{e}{t} dt \quad \text{en multipliant par } -1 \\
\Rightarrow & \int_1^x \frac{e^x}{t} dt \geq \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_1^x \frac{e}{t} dt \\
\Rightarrow & e^x [\ln(t)]_1^x \geq \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq e [\ln(t)]_1^x \\
\Rightarrow & e^x \ln(x) \geq f(x) \geq e \ln(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout $x \in]0, 1]$: $f(x) \leq e^x \ln(x)$ et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \ln(x) = -\infty$, on a par majoration :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

4. Dresser le tableau de variation de f .

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = h(x) = \frac{e^x}{x}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui donne :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- EXERCICE 5 -

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation : $f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Établir, à l'aide d'une IPP, que pour tout $k \geq 0$: $f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$.

On a par IPP avec $u : t \mapsto t^{k+1}$ ($u'(t) = (k+1)t^k$) et $v : t \mapsto \frac{-e^{-tx}}{x}$ ($v'(t) = e^{-tx}$ car la variable est t) fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x) &= \int_0^1 t^{k+1} e^{-tx} dt \\
&= \left[t^{k+1} \frac{-e^{-tx}}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 (k+1)t^k \frac{e^{-tx}}{x} dt \\
&= -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} \int_0^1 t^k e^{-tx} dt \\
&= \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}
\end{aligned}$$

2. A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$.

On pose $u = tx$ donc $t = \frac{u}{x}$ et $dt = \frac{1}{x} du$, changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$.

Si t varie entre 0 et 1, alors u varie entre 0 et x , ce qui donne :

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u} \left(\frac{1}{x} du\right) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$$

3. En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis montrer que : $f'_k(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{k+1}{x} f_k(x) = -f_{k+1}(x)$.

Notons $f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du = h(x)G(x)$ avec $h : x \mapsto \frac{1}{x^{k+1}}$ et $G : x \mapsto \int_0^x u^k e^{-u} du$.

G est la primitive de la fonction $u \mapsto u^k e^{-u}$ qui s'annule en 0 donc G est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a : $G'(x) = x^k e^{-x}$. Ainsi, f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonction dérivables et on a pour tout $x \in]0, +\infty[$ (avec $h'(x) = (x^{-(k+1)})' = -(k+1)x^{-k-2}$) :

$$\begin{aligned}
f'_k(x) &= -(k+1)x^{-k-2} \int_0^x u^k e^{-u} du + \frac{1}{x^{k+1}} x^k e^{-x} \\
&= \frac{-(k+1)}{x^{k+2}} \int_0^x u^k e^{-u} du + \frac{1}{x^{k+1}} x^k e^{-x} \\
&= \frac{-(k+1)}{x} \underbrace{\frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du}_{=f_k(x)} + \frac{e^{-x}}{x} \\
&= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{k+1}{x} f_k(x) = -f_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

- EXERCICE 6 -

On considère les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que les fonctions F et G sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $[1, x]$ fermé (ou $[x, 1]$). Ainsi, les intégrales et donc les fonctions F et G sont bien définies.

2. Montrer que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis étudier les variations de F .

Notons $h : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ l'intégrande. h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de dénominateur non nul de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $F : x \mapsto \int_1^x h(t) dt$ est la primitive de h qui s'annule en 1. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ car dérivable et de dérivée $F' = h$ continue.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $F'(x) = h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

3. Montrer que G est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis montrer que $G'(x) = 0$ pour tout $x > 0$.

Notons $h : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ l'intégrande.

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet une primitive H de classe $\mathcal{C}^1$ (puisque $H' = h$ est continue). On a alors :

$$G(x) = \int_{1/x}^x h(t) dt = [H(t)]_{1/x}^x = H(x) - H(1/x)$$

Ainsi, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, on a par définition de H : $H'(x) = h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
G'(x) &= [H(x) - H(1/x)]' \\
&= H'(x) - \frac{-1}{x^2} H'(1/x) \\
&= h(x) + \frac{1}{x^2} h(1/x) \\
&= \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\ln(1/x)}{1+1/x^2} \\
&= \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{-\ln(x)}{x^2+1} = 0
\end{aligned}$$

4. En déduire que G est nulle puis que pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

• D'après la question précédente, $G'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, G est constante.

Pour déterminer la valeur de cette constante, on calcule G en un point simple.

On a : $G(1) = \int_1^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$. Ainsi, G est constante égale à 0 donc $G(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- On remarque que :

$$G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_{1/x}^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = - \int_1^{1/x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = F(x) - F(1/x)$$

Comme on vient de voir que $G(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que pour tout $x > 0$, on a :

$$G(x) = F(x) - F(1/x) = 0 \text{ soit } F(x) = F(1/x)$$

5. **A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans l'intégrale définissant F , retrouver le fait que pour tout**

$$x \in \mathbb{R}_+^* : F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x).$$

$$\text{On a : } F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$

$$\text{On pose : } t = \frac{1}{u}, \text{ ce qui donne : } dt = \frac{-1}{u^2} du.$$

Enfin, si t est compris entre 1 et $1/x$, on a u compris entre 1 et x . Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_1^{1/x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_1^x \frac{\ln(1/u)}{1+1/u^2} \frac{-1}{u^2} du \\ &= \int_1^x \frac{\ln(1/u)}{1+1/u^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= - \int_1^x \frac{\ln(u)}{u^2+1} du \\ &= \int_1^x \frac{\ln(u)}{u^2+1} du = F(x) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* : F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x).$$

- EXERCICE 7 -

1. **Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x .**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée ($t^2+1 > 0$) et inverse d'une fonction continue dont le dénominateur ne s'annule pas.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $[x, 2x]$ donc $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est bien définie.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

2. **Établir que f est impaire.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}} (-du) \quad \text{changement de variable } t = -u, \quad dt = -du \\ &= - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est impaire.

3. **Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x .**

Comme f est impaire, il suffit d'étudier son signe sur $\mathbb{R}_+$. Soit donc $x \in \mathbb{R}_+$. On a par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans le bon sens ($2x \geq x$ car $x \geq 0$) :

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \geq 0 \implies \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \geq 0$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$ puis par imparité, $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $f(x) \leq 0$.

4. **Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

Soit $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. Comme la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car $G' = g$ est continue). On a alors :

$$f(x) = \int_x^{2x} g(t) dt = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$$

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= 2g(2x) - g(x) \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \end{aligned}$$

car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, par croissance de la fonction racine et décroissante de la fonction inverse :

$$0 < x^2 + \frac{1}{4} < x^2 + 1 \text{ donc } \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} < \sqrt{x^2 + 1} \text{ donc } \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} > \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Finalement, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. (a) **Montrer que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^2 + 1 > x^2 \geq 0.$$

Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$$

donc

$$x + \sqrt{x^2+1} > x + |x| \geq 0 \quad \text{car} \quad x + |x| = \begin{cases} x + (-x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x + x = 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donc $\sqrt{x^2+1} + x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- (b) **Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.**

La fonction h est dérivable comme composée de fonctions dérivables ($x + \sqrt{x^2+1} > 0$) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(c) **En déduire l'expression explicite de $f(x)$.**

D'après la question précédente, la fonction h est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \left[\ln(t + \sqrt{t^2+1}) \right]_x^{2x} \\ &= \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln\left(\frac{2x + \sqrt{4x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) \end{aligned}$$

6. (a) **Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a :** $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} dt$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a, en remarquant que : $x = \int_x^{2x} 1 dt$:

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} 1 dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_x^{2x} 1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1} - 1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{(\sqrt{t^2+1} - 1)(\sqrt{t^2+1} + 1)}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1} + 1)} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{t^2 + 1 - 1}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1} + 1)} dt \end{aligned}$$

soit

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} dt$$

(b) **En déduire que :** $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\sqrt{t^2+1} \geq 1$ donc $\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1}) \geq 2$. On a alors, par décroissance de la fonction inverse :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \leq \frac{1}{2}$$

et donc, comme $t^2 \geq 0$:

$$0 \leq \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} \leq \frac{t^2}{2}$$

On a donc par croissance de l'intégrale (bornes dans le bon sens car $2x > x$ car $x > 0$) :

$$0 \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} dt \leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{2} dt = \left[\frac{t^3}{6} \right]_x^{2x} = \frac{8x^3}{6} - \frac{x^3}{6} = \frac{7x^3}{6}$$

Finalement, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$.

(c) **Conclure que $f(x) \sim x$ puis montrer que l'on a aussi :** $f(x) \sim x$.

L'encadrement précédent donne alors :

$$x - \frac{7}{6}x^3 \leq f(x) \leq x$$

Comme $x > 0$, on obtient :

$$1 - \frac{7}{6}x^2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{7}{6}x^2 = 1$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$, ce qui prouve que $f(x) \sim x$.

(d) **En déduire que l'on a aussi :** $f(x) \sim x$.

On a, en utilisant le changement de variable $x = -t$ puis l'imparité de la fonction f :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f(x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$$

d'après la question précédente.

On vient de montrer que $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t)}{t} = 1$ ce qui prouve que $f(t) \sim t$.

- EXERCICE 8 -

Soit x un réel de $]0; 1[$.

1. **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :** $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

Comme $x \neq 1$, on peut appliquer la formule de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison x :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

2. **En intégrant la relation obtenue à la question précédente, montrer que :** $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

Pour tout $t \in [0, x]$, on a également :

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

égalité que l'on peut intégrer entre 0 et $x > 0$.

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$$

D'une part, on a par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_{k=0}^{n-1} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

D'autre part, on a, encore par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

On en déduit que : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

3. **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ **puis en déduire que :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
 Pour encadrer l'intégrale, on commence par encadrer l'intégrande. Pour tout $t \in [0, x]$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq t \leq x \\ \iff -x &\leq -t \leq 0 \\ \iff 0 &< 1-x \leq 1-t \leq 1 \quad \text{car } x < 1 \\ \iff 0 &\leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ \iff 0 &\leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x} \quad \text{car } t^n \geq 0 \\ \implies 0 &\leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-x} dt \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\ \implies 0 &\leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \\ \implies 0 &\leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

De plus, comme $x \in]0, 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$ donc par quotient, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$.
 Donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

4. **En déduire que la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge et que :** $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

On a vu que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

soit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\ &= [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\ &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(1-x). \end{aligned}$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$ d'après la question précédente.

Ainsi, la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge et : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

- EXERCICE 9 -
Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. **Étude de f_n .**
- (a) **Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n .**
 La fonction $h : t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ étant continue sur $[n, +\infty[$, la fonction f_n est la primitive de h qui s'annule en n .
 Ainsi, comme $f_n' = h$ est continue, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$.

De plus, on a pour tout x de $[n, +\infty[: f_n'(x) = h(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$ donc la fonction f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

- (b) **En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.**
 Sur $[n, +\infty[$, on a par croissance de la fonction exponentielle :

$$e^{\sqrt{t}} > e^{\sqrt{n}}$$

ce qui donne par croissance de l'intégrale ($x \geq n$) :

$$f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt \geq \int_n^x e^{\sqrt{n}} dt = e^{\sqrt{n}} \int_n^x 1 dt = e^{\sqrt{n}}(x-n)$$

- Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{n}}(x-n) = +\infty$, on a par minoration : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
- (c) **En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.**
 La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$.
 De plus, on a : $f_n(n) = \int_n^n e^{\sqrt{t}} dt = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
 Ainsi, f_n réalise une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
 Comme $1 \in [0, +\infty[$, il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. **Étude de la suite (u_n) .**
- (a) **Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.**
 D'après la question précédente, on a : $u_n \geq n$.
 Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on obtient par minoration : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- (b) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N} : e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
 Sur $[n, u_n]$, on a :

$$e^{\sqrt{n}} \leq e^{\sqrt{t}} \leq e^{\sqrt{u_n}}$$

ce qui donne par croissance de l'intégrale ($u_n \geq n$) :

$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}} dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}} dt$$

soit en remarquant que $f_n(u_n) = \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt = 1$

$$e^{\sqrt{n}}(u_n - n) \leq 1 \leq e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n)$$

L'inégalité de gauche donne alors :

$$u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

et celle de droite :

$$u_n - n \geq e^{-\sqrt{u_n}}$$

- Finalement, $\forall n \in \mathbb{N} : e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) **Utiliser la question 2b pour compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .**
 Comme $u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$, il suffit de trouver n tel que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$.

```
1 from math import exp, sqrt
2 n = 0
3 while exp(sqrt(n)) > 10**(-4) :
4     n = n+1
5 print(n)
```

- (b) **Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de $\ln 10$.**
 On a :

$$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \iff -\sqrt{n} \leq -4.\ln(10) \iff n \geq (4.\ln(10))^2 \approx 16.(2.3)^2 \approx 84.64$$

Le script va donc afficher pour n la valeur 85.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

(a) **Montrer que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, on a par composition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{u_n}} = 0$.

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0$.

Donc le théorème des gendarmes donne avec la question précédente :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - n = 0$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

(b) **Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1 , on a :** $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Pour tout $x \geq -1$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &\leq 1 + \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow 1+x &\leq \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \quad \text{par croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+ \\ \Leftrightarrow 1+x &\leq 1+x+\frac{x^2}{4} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

Cette dernière relation étant vraie, on a bien : $\forall x \geq -1 : \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

(c) **Vérifier ensuite que :** $\forall n \in \mathbb{N}^* : e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{u_n}} &\geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \\ \Leftrightarrow e^{-\sqrt{u_n}+\sqrt{n}} &\geq \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \\ \Leftrightarrow -\sqrt{u_n}+\sqrt{n} &\geq -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{u_n} &\geq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{v_n+n} &\geq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{v_n+n}}{\sqrt{n}} &\geq 1 + \frac{v_n}{2n} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{v_n}{n}+1} &\geq 1 + \frac{v_n}{2n} \end{aligned}$$

ce qui est vrai d'après la question précédente avec $x = u_n \geq 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^* : e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

(d) **Déduire de l'encadrement obtenu en 2b que :** $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

On a, d'après la question 2b :

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

ce qui donne avec le résultat de la question précédente :

$$e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$$

Or, on a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ puis par composition $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = 1$, la fonction exponentielle étant continue.

On en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$, ce qui prouve que $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

- EXERCICE 10 -

On pose pour tout entier $n \geq 0$: $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$.

1. **Calculer I_1 .**

$$\text{On a : } I_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-1}}{2}.$$

2. **Établir que pour tout entier naturel n , on a :** $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ **puis déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**

On commence par encadrer l'intégrande. On a pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ \Rightarrow -1 &\leq -x^2 \leq 0 \\ \Rightarrow 0 &\leq e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1 \quad \text{car exp est croissante} \\ \Rightarrow 0 &\leq x^n e^{-x^2} \leq x^n \quad \text{car } x^n \geq 0 \\ \Rightarrow 0 &\leq \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx \quad \text{par croissance de l'intégrale (bornes dans le bon sens)} \\ \Rightarrow 0 &\leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

On a donc : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ puis comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on a d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

3. (a) **A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n , la relation :**

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$$

On a : $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{-x^2} dx$. L'idée est d'écrire : $x^{n+2} e^{-x^2} = x^{n+1} \cdot x e^{-x^2}$.

On choisit alors : $u(x) = x^{n+1}$, $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, $v'(x) = x e^{-x^2}$.

Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on a par IPP :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 x^{n+2} e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^{n+1} \cdot x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} x^{n+1} e^{-x^2} \right]_0^1 - \int_1^1 (n+1)x^n \frac{-e^{-x^2}}{2} dx \\ &= -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e}$.

(b) **Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis en déduire un équivalent de I_n .**

On obtient grâce à la question précédente :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e} \Leftrightarrow \frac{nI_n}{2} = I_{n+2} - \frac{I_n}{2} + \frac{1}{2e} \Leftrightarrow nI_n = 2I_{n+2} - I_n + \frac{1}{e}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{e}$.

On en déduit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n e I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{ne}} = 1$ et donc que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{ne}$.

4. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$.

(a) Établir la relation : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2e} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$ puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{I_{2(n+1)+1}}{(n+1)!} = \frac{I_{2n+3}}{(n+1)!} = \frac{I_{(2n+1)+2}}{(n+1)!} \\ &= \frac{\frac{(2n+1)+1}{2} I_{2n+1} - \frac{1}{2e}}{(n+1)!} \quad \text{avec la question 3a en prenant } n \leftarrow (2n+1) \\ &= \frac{\frac{2n+2}{2} I_{2n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{2e(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1) I_{2n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{2e(n+1)!} \\ &= \frac{I_{2n+1}}{n!} - \frac{1}{2e(n+1)!} \\ &= u_n - \frac{1}{2e(n+1)!} \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat demandé.

On peut faire apparaître la différence de deux termes consécutifs de la suite (u_n) dans l'expression précédente. En effet, on a en renommant la variable n en k :

$$u_{k+1} - u_k = -\frac{1}{2e} \frac{1}{(k+1)!}$$

ce qui donne par sommation entre 0 et $n-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{2e} \frac{1}{(k+1)!} \\ u_n - u_0 &= -\frac{1}{2e} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \\ u_n &= u_0 - \frac{1}{2e} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ u_n &= \frac{1}{2} - \frac{e^{-1}}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{car } u_0 = I_1 = \frac{1}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \\ u_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

(b) Donner, sous forme de somme, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n .

On a alors par définition de u_n :

$$I_{2n+1} = n! u_n = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{2e} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

(c) Vérifier que pour tout entier $k \geq 1$, on a : $I_{2k+1} = k I_{2k-1} - \frac{1}{2e}$ puis compléter le script SciLab suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur de I_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

Soit $k \geq 1$. La relation de la question 3a donne avec $n = 2k-1$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2e} \implies I_{2k+1} = \frac{2k}{2} I_{2k-1} - \frac{1}{2e} = k I_{2k-1} - \frac{1}{2e}$$

```
1 n = int(input('entrer la valeur de n : '))
2 I = 1/2 - np.exp(-1)/2 # on initialise I_1
3 for k in range(1,n+1) : # on calcule I_3 / I_5 / ...
4     I = k*I - 1/(2*np.exp(1)) # relation de récurrence obtenue
5 print(I)
```

- EXERCICE 11 -

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ définie sur $]1, +\infty[$ et on pose pour tout entier $n \geq 2$: $v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

1. Déterminer les variations de f puis en déduire que pour tout $k \geq 2$: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$.

La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas ($t > 1 \implies \ln(t) > 0$). On a pour tout $t > 1$:

$$f'(t) = -\frac{\ln(t)+1}{(t \ln(t))^2} < 0$$

Ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. On a alors pour $k \geq 2$ et $t \in \llbracket k; k+1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} k &\leq t \leq k+1 \\ \implies f(k+1) &\leq f(t) \leq f(k) \quad \text{par décroissance de } f \text{ sur }]1, +\infty[\\ \implies \int_k^{k+1} f(k+1) dt &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt \quad \text{par croissance de l'intégrale (bornes dans le bon sens)} \\ \implies f(k+1) \underbrace{\int_k^{k+1} 1 dt}_{=[t]_k^{k+1}=1} &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \underbrace{\int_k^{k+1} 1 dt}_{=1} \\ \implies f(k+1) &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \end{aligned}$$

2. En déduire que : $\forall n \geq 2, \quad \int_2^n f(t) dt + f(n) \leq v_n \leq \int_2^n f(t) dt + f(2)$.

Soit $n \geq 2$. Pour obtenir l'intégrale $\int_2^n f(t) dt$ grâce à la relation de Chasles, on va sommer les inégalités précédentes entre $k=2$ et $k=n-1$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} f(k+1) &\leq \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k) \\ \implies \sum_{i=3}^n f(i) &\leq \int_2^n f(t) dt \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k) \\ \implies \sum_{i=2}^n f(i) - f(2) &\leq \int_2^n f(t) dt \leq \sum_{k=2}^n f(k) - f(n) \\ \implies v_n - f(2) &\leq \int_2^n f(t) dt \leq v_n - f(n) \end{aligned}$$

L'inégalité de gauche donne : $v_n \leq \int_2^n f(t) dt + f(2)$

L'inégalité de droite donne : $v_n \geq \int_2^n f(t) dt + f(n)$

d'où le résultat : $\forall n \geq 2, \quad \int_2^n f(t) dt + f(n) \leq v_n \leq \int_2^n f(t) dt + f(2)$.

3. Calculer $\int_2^n f(t) dt$. En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$.

On a (dérivée de la forme u'/u) :

$$\int_2^n f(t) dt = \int_2^n \frac{1}{t \ln(t)} dt = [\ln(\ln(t))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

On a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) = +\infty$ par composition.

Comme $v_n \geq \int_2^n f(t) dt + f(n)$, on a par minoration : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$.

Ainsi, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n n \frac{1}{k \ln(k)} = +\infty$, ce qui signifie que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln(k)}$ diverge.

4. **Déterminer un équivalent de v_n en $+\infty$.**

On revient à l'encadrement : $\forall n \geq 2$,

$$\int_2^n f(t) dt + f(n) \leq v_n \leq \int_2^n f(t) dt + f(2)$$

ce qui donne avec la valeur de l'intégrale calculée précédemment :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{n \ln(n)} \leq v_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}$$

On conjecture alors que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$ et on le montre en étudiant la limite du quotient $\frac{v_n}{\ln(\ln(n))}$.

On transforme l'encadrement :

$$1 + \underbrace{\frac{-\ln(\ln(2)) + \frac{1}{n \ln(n)}}{\ln(\ln(n))}}_{\rightarrow 0} \leq \frac{v_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 + \underbrace{\frac{-\ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}}{\ln(\ln(n))}}_{\rightarrow 0}$$

Ainsi, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{-\ln(\ln(2)) + \frac{1}{n \ln(n)}}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{-\ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}}{\ln(\ln(n))} = 1$ donc d'après le théorème

des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{\ln(\ln(n))} = 1$ puis que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.