

- EXERCICE 1 -

On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

- Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base notée $\mathcal{B}$.
Donner la dimension de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
- Soit A une matrice fixée de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, associe la matrice $u(S) = ASA$.
 - Montrer : $\forall S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \quad u(S) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
 - Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
- Dans cette question, on suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Déterminer $\text{Ker}(u)$. u est-il un automorphisme?
 - Déterminer le rang de u .
- Dans cette question, on ne donne pas A mais on suppose que A est inversible.
 - Déterminer $\text{Ker}(u)$ puis en déduire que u est un automorphisme.
 - Pour toute matrice S de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ exprimer la matrice $u^{-1}(S)$ en fonction de S et de A^{-1} .

- EXERCICE 2 -

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E .

Pour tout polynôme P de E (noté indifféremment P ou $P(X)$), on considère : $a(P) = P - XP'$, $b(P) = P - P'$.

- Montrer que a est un endomorphisme de E .
 - Déterminer $\text{Im}(a)$ puis en déduire une base de $\text{Ker}(a)$.
 - L'endomorphisme a est-il bijectif?
- On admet que b est un endomorphisme de E .
Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E , on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.
- On considère à présent l'application f définie par : $f = b \circ a - a \circ b$.
Montrer : $\forall P \in E, f(P) = P'$ puis en déduire que $f^3 = 0$.

- EXERCICE 3 -

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J$

- Calculer $f(I)$ et $f(J)$.
- Montrer que f est un endomorphisme.
- Déterminer une base du noyau de f . f est-elle injective?
- En déduire le rang de f puis une base de l'image de f .

- EXERCICE 4 -

Soit E un espace vectoriel. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de E défini par : $f_a(e_2) = 0$ et $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$.

- Déterminer une base de $\text{Im}(f_a)$.
- Montrer qu'une base de $\text{Ker}(f_a)$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.

- EXERCICE 5 -

On considère les applications : $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 $M \mapsto M - {}^tM \qquad M \mapsto M + {}^tM$

- Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Calculer $f(I)$. f est-il un automorphisme?
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ puis en déduire $\dim(\text{Ker}(f))$.
- Montrer que $f^2 = 2f$, que $g^2 = 2g$ et que $f \circ g = g \circ f = 0$.
- En déduire que $(f + g)^2 = 4id$. L'endomorphisme $(f + g)$ est-il un automorphisme?

- EXERCICE 6 -

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E , les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E , associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) \, dt$$

- Montrer que φ est linéaire.
- Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x , puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2 .
- Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E .
- Déterminer une base de l'image de φ puis en déduire que c'est un automorphisme de E .

- EXERCICE 7 -

On considère l'application : $f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$
 $P \mapsto P(X+1) - P(X)$

- Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
- Déterminer une base de l'image de f .
- En déduire la dimension de $\text{ker}(f)$ puis en déterminer une base.

- EXERCICE 8 -

Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.

- $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$(x, y, z, t) \mapsto (x-t, y+z, y-z, x+t)$

$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$

$P \mapsto P+P'$
- $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$

$f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$P \mapsto (P(0), P'(1), P''(0))$

- EXERCICE 9 -

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer B^2 puis en déduire, en raisonnant par l'absurde, que B n'est pas inversible.
 - Déterminer une base de $\text{Ker}(B)$ puis retrouver le résultat précédent.
- Déterminer $\text{rg}(B - 2I)$ puis en déduire la dimension du noyau de la matrice $(B - 2I)$.
 - Déterminer une base de $\text{Ker}(B - 2I)$.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 10 -

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM .

- Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.
- Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

- EXERCICE 11 -

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

- Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.
- Démontrer l'équivalence suivante : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.