

- EXERCICE 1 -

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base notée $\mathcal{B}$.

Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Déterminons une famille génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in \mathcal{S} \iff {}^tM = M \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = a \\ b = c \\ c = b \\ d = d \end{cases} \iff \begin{cases} b = c \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi, $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + dM_3$.

Donc $\mathcal{S} = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ et (M_1, M_2, M_3) est une famille génératrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Cette famille est clairement libre (0 échelonnés) donc c'est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3$.

2. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On note u l'application qui à chaque matrice S de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, associe la matrice $u(S) = ASA$.

(a) **Montrer :** $\forall S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \quad u(S) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Il s'agit de montrer que si S est symétrique, alors $u(S)$ est aussi symétrique, i.e ${}^t(u(S)) = u(S)$. On a :

$$\begin{aligned} {}^t(u(S)) &= {}^t(ASA) = {}^tA {}^tS {}^tA \\ &= ASA \quad \text{car } A \text{ et } S \text{ sont symétriques} \\ u(S) \end{aligned}$$

Ainsi, ${}^t(u(S)) = u(S)$ donc $u(S) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

(b) **Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.**

Soit $(S, T) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} u(S + \lambda T) &= A(S + \lambda T)A \\ &= A(SA + \lambda TA) \\ &= ASA + \lambda ATA \\ &= ASA + \lambda ATA = u(S) + \lambda u(T) \end{aligned}$$

Donc u est une AL de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ car $u(S) \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ si $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ d'après la question précédente.

Ainsi, u est un endomorphisme de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, on suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) **Déterminer $\text{Ker}(u)$. u est-il un automorphisme ?**

Déterminons $\text{Ker}(u)$. Soit $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (attention à bien choisir S symétrique). On a :

$$\begin{aligned} S \in \text{Ker}(u) &\iff u(S) = 0 \\ &\iff ASA = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} a - 2b + d & -a + 2b - d \\ -a + 2b - d & a - 2b + d \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} a - 2b + d = 0 \\ a = 2b - d \end{cases} \\ &\iff S = \begin{pmatrix} 2b - d & b \\ b & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = bB + dD \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(B, D)$.

La famille (B, D) engendre $\text{Ker}(u)$. De plus elle est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $\text{Ker}(u)$.

Comme $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$, on en déduit que u n'est pas injectif donc u n'est pas un automorphisme.

(b) **Déterminer le rang de u .**

D'après la question précédente, on a : $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$. Le théorème de rang donne alors avec $u \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$ et $\dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = 3$:

$$\dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u) = \dim(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) \quad \text{soit} \quad \text{rg}(u) = 3 - 2 = 1$$

4. Dans cette question, on ne donne pas A mais on suppose que A est inversible.

(a) **Déterminer $\text{Ker}(u)$ puis en déduire que u est un automorphisme.**

Déterminons $\text{Ker}(u)$. Soit $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} S \in \text{Ker}(u) &\iff u(S) = 0 \\ &\iff ASA = 0 \\ &\iff A^{-1}ASAA^{-1} = A^{-1}0A^{-1} \quad \text{car } A^{-1} \text{ existe} \\ &\iff S = 0 \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(u) = \{0\}$. Ainsi, u est un endomorphisme injectif. On en déduit que u est bijectif par la caractérisation de la bijectivité des endomorphismes. u est donc un automorphisme.

(b) **Pour toute matrice S de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ exprimer la matrice $u^{-1}(S)$ en fonction de S et de A^{-1} .**

On cherche l'expression de u^{-1} en résolvant l'équation $u(S) = T$ pour $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} u(S) = T &\iff ASA = T \\ &\iff A^{-1}ASAA^{-1} = A^{-1}TA^{-1} \\ &\iff S = A^{-1}TA^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $u^{-1}(T) = A^{-1}TA^{-1}$ pour tout $T \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

- EXERCICE 2 -

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E .

Pour tout polynôme P de E (noté indifféremment P ou $P(X)$), on considère : $a(P) = P - XP'$, $b(P) = P - P'$

1. (a) Montrer que a est un endomorphisme de E .

• Soient $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} a(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q) - X(P + \lambda Q)' \\ &= P + \lambda Q - XP' - \lambda XQ' \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= P - XP' + \lambda(Q - XQ') \\ &= a(P) + \lambda a(Q) \end{aligned}$$

donc a est une application linéaire.

• D'autre part, si $P \in E$, P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 donc P' est de degré inférieur ou égal à 1 et XP' est de degré inférieur ou égal à 2 et enfin $a(P) = P - XP'$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 donc $a(P) \in E$.

Ainsi, a est un endomorphisme de E .

(b) **Déterminer $\text{Im}(a)$ puis en déduire une base de $\text{Ker}(a)$.**

Notons $(P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$ la base canonique de E . On a :

$$\text{Im}(a) = \text{Vect}(a(P_0), a(P_1), a(P_2))$$

- $a(P_0) = P_0 - XP'_0 = 1 - X \times 0 = 1$,
- $a(P_1) = P_1 - XP'_1 = X - X \times 1 = 0$,
- $a(P_2) = P_2 - XP'_2 = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Ainsi : $\text{Im}(a) = \text{Vect}(1, 0, -X^2) = \text{Vect}(1, -X^2) = \text{Vect}(P_0, -P_2)$.

La famille $(P_0, -P_2)$ est génératrice de $\text{Im}(a)$ et elle est libre (deux vecteurs non colinéaires) donc c'est une base de $\text{Im}(a)$ et $\dim(\text{Im}(a)) = 2$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\text{Ker}(a)) + \dim(\text{Im}(a))$ soit $\dim(\text{Ker}(a)) = 3 - 2 = 1$.

Or, on a vu que $a(P_1) = 0$ ce qui signifie que $P_1 \in \text{Ker}(a)$.

Ainsi la famille (P_1) est une famille libre (non nul) de $\text{Ker}(a)$ qui est de dimension 1 donc c'est une base de $\text{Ker}(a)$.

(c) **L'endomorphisme a est-il bijectif?**

$\text{Ker}(a) \neq \{0\}$ donc a n'est pas injectif donc a n'est pas bijectif.

2. **On admet que b est un endomorphisme de E .**

Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E , on a : $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

Inutile ici de démontrer que b est bijectif, la preuve de la deuxième partie de la question permettant de déduire la bijectivité (si on n'y pense pas, on peut montrer la bijectivité en montrant que $\text{Ker}(b) = \{0\}$).

Posons d l'endomorphisme qui, à tout polynôme Q de E , associe : $d(Q) = Q + Q' + Q''$. On a alors pour tout polynôme P de E :

$$\begin{aligned} b \circ d(P) &= b(d(P)) = b(P + P' + P'') \\ &= (P + P' + P'')' - (P + P' + P'')'' \\ &= P + P' + P'' - P' - P'' - P''' \\ &= P \quad \text{car } P \text{ est de degré au plus 2 donc } P''' = 0 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} d \circ b(P) &= d(b(P)) = d(P - P') \\ &= (P - P')' + (P - P')'' + (P - P')''' \\ &= P - P' + P' - P'' + P'' - P''' \\ &= P \quad \text{car } P \text{ est de degré au plus 2 donc } P''' = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $b \circ d = d \circ b = id$ donc b est bijectif et $b^{-1} = d$.

3. **On considère à présent l'application f définie par : $f = b \circ a - a \circ b$.**

Montrer : $\forall P \in E, f(P) = P'$ puis en déduire que $f^3 = 0$.

Pour tout P de E , on a :

$$\begin{aligned} f(P) &= (b \circ a - a \circ b)(P) = b(a(P)) - a(b(P)) \\ &= b(P - XP') - a(P - P') \\ &= (P - XP')' - (P - XP')'' - ((P - P') - X(P - P'))' \\ &= P - XP' - P' + (XP')' - (P - P') + X(P' - P'') \\ &= P - XP' - P' + P' + XP'' - P + P' + XP' - XP'' \\ &= P - XP' - P' + P' + XP'' - P + P' + XP' - XP'' \\ &= P' \end{aligned}$$

On a bien : $\forall P \in E, f(P) = P'$.

Pour tout P de E , on a alors :

$$f^3(P) = f(f(f(P))) = f(f(P')) = f(P'') = P''' = 0 \text{ car } P \text{ est de degré au plus 2}$$

Ainsi, $f^3 = 0$

- EXERCICE 3 -

Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'application : $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J$$

1. **Calculer $f(I)$ et $f(J)$.**

On trouve $f(I) = I$ et $f(J) = J$.

2. **Montrer que f est un endomorphisme.**

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : $M + \lambda N = \begin{pmatrix} a + \lambda e & b + \lambda f \\ c + \lambda g & d + \lambda h \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= \frac{a + \lambda e + d + \lambda h}{2}I + \frac{b + \lambda f + c + \lambda g}{2}J \\ &= \frac{a+d}{2}I + \frac{b+c}{2}J + \lambda \frac{e+h}{2}I + \frac{f+g}{2}J \\ &= f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. **Déterminer une base du noyau de f . f est-elle injective?**

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in \text{Ker}(f) \iff f(M) = 0 \iff \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix} = 0$$

ce qui donne $d = -a$ et $c = -b$ soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

On trouve alors : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\text{Ker}(f)$. De plus, elle est libre (2 vecteurs non colinéaires)

donc c'est une base de $\text{Ker}(f)$.

Enfin, : $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.

4. **En déduire le rang de f puis une base de l'image de f .**

On obtient en appliquant le théorème du rang : $\text{rg}(f) = 2$.

D'après la première question, $f(I) = I$ et $f(J) = J$ sont deux matrices de l'image de f (par définition). Ainsi, (I, J) forme une famille libre (2 vecteurs non colinéaires) de deux matrices de $\text{Im}(f)$ qui est de dimension 2 donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

- EXERCICE 4 -

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. **Déterminer une base de $\text{Im}(f_a)$.**

Comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E , on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f_a) &= \text{Vect}(f_a(e_1), f_a(e_2), f_a(e_3)) \\ &= \text{Vect}(ae_1 + e_2 - ae_3, 0, ae_1 + e_2 - ae_3) \\ &= \text{Vect}(ae_1 + e_2 - ae_3) \end{aligned}$$

La famille $(ae_1 + e_2 - ae_3)$ engendre $\text{Im}(f_a)$ et forme une famille libre (un seul vecteur non nul) donc c'est une base de $\text{Im}(f_a)$ et $\text{rg}(f_a) = 1$.

2. **Montrer qu'une base de $\text{Ker}(f_a)$ est $(e_2, e_1 - e_3)$.**

Comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E , on a $\dim(E) = 3$ donc d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Ker}(f_a)) + \text{rg}(f_a) = \dim(E) \quad \text{soit} \quad \dim(\text{Ker}(f_a)) = 3 - 1 = 2$$

De plus :

$f_a(e_2) = 0$ donc $e_2 \in \text{Ker}(f_a)$.

$f_a(e_1 - e_3) = f_a(e_1) - f_a(e_3) = 0$ donc $e_1 - e_3 \in \text{Ker}(f_a)$.

La famille $(e_2, e_1 - e_3)$ est une famille libre (deux vecteurs non colinéaires) de $\text{Ker}(f_a)$ qui est de dimension 2 donc c'est une base de $\text{Ker}(f_a)$.

- EXERCICE 5 -

On considère les applications : $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $g: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 $M \rightarrow M - {}^tM \qquad M \rightarrow M + {}^tM$

1. **Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**

Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= (M + \lambda N) - {}^t(M + \lambda N) \\ &= (M + \lambda N) - {}^tM - \lambda {}^tN \\ &= (M - {}^tM) + \lambda(N - {}^tN) \\ &= f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
De même pour g .

2. **Calculer $f(I)$. f est-il un automorphisme? Déterminer $\text{rg}(f)$.**

On a : $f(I) = I - {}^tI = 0$ donc $I \in \text{Ker}(f)$.

Remarque : Attention, cela ne signifie pas que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(I)$.

Ainsi, $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$ donc f n'est pas injectif donc f n'est pas automorphisme.

3. **Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ puis en déduire $\dim(\text{Ker}(f))$.**

En notant (M_1, M_2, M_3, M_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(M_1), f(M_2), f(M_3), f(M_4)) \\ &= \text{Vect}(0, M_2 - M_3, M_3 - M_2, 0) \\ &= \text{Vect}(M_2 - M_3) \quad \text{car } M_3 - M_2 = -(M_2 - M_3) \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $(M_2 - M_3)$ engendre $\text{Im}(f)$ et elle est libre car $M_2 - M_3 \neq 0$ donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Ainsi, $\text{rg}(f) = 1$ et d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \quad \text{soit} \quad \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3$$

Ne connaissant pas $\text{Ker}(f)$, on ne peut pas obtenir le rang avec le théorème du rang.

4. **Montrer que $f^2 = 2f$, que $g^2 = 2g$ et que $f \circ g = g \circ f = 0$.**

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$f^2(M) = f(f(M)) = f(M - {}^tM) = (M - {}^tM) - {}^t(M - {}^tM) = M - {}^tM - {}^tM + M = 2(M - {}^tM) = 2f(M)$$

Ainsi, $f^2 = 2f$.

De même, on a $g^2 = 2g$.

Enfin, on a :

$$f \circ g(M) = f(g(M)) = f(M + {}^tM) = (M + {}^tM) - {}^t(M + {}^tM) = M + {}^tM - {}^tM - M = 0$$

Ainsi, $f \circ g = 0$.

De même, on a $g \circ f = 0$.

5. **En déduire que $(f + g)^2 = 4id$. L'endomorphisme $(f + g)$ est-il un automorphisme?**

On a (attention les endomorphismes ne commutent pas forcément) :

$$(f + g)^2 = (f + g) \circ (f + g) = f \circ f + f \circ g + g \circ f + g \circ g = f^2 + 0 + 0 + g^2 = 2f + 2g = 2(f + g)$$

Or, on a pour toute matrice M : $(f + g)(M) = M - {}^tM + M + {}^tM = 2M$ donc $f + g = 2id$.

Ainsi, $(f + g)^2 = 2(f + g) = 4id$.

Comme $(f + g)^2 = 4id$, on a : $(f + g) \circ (1/4(f + g)) = id$ donc l'endomorphisme $(f + g)$ est un automorphisme et $(f + g)^{-1} = (1/4(f + g))$.

- EXERCICE 6 -

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E , les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2.$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E , associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt$$

1. **Montrer que φ est linéaire.**

Soient P et Q deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\varphi(P + \lambda Q)(x) = \int_0^1 (P + \lambda Q)(x+t) dt = \int_0^1 (P(x+t) + \lambda Q(x+t)) dt = \int_0^1 P(x+t) dt + \lambda \int_0^1 Q(x+t) dt$$

Ainsi, $\varphi(P + \lambda Q) = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$ donc φ est linéaire.

2. **Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x , puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2 .**

$$\bullet \varphi(e_0)(x) = \int_0^1 e_0(x+t) dt = \int_0^1 1 dt = 1 = e_0(x).$$

$$\bullet \varphi(e_1)(x) = \int_0^1 e_1(x+t) dt = \int_0^1 (x+t) dt = \int_0^1 x dt + \int_0^1 t dt = \left[xt\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}e_0(x) + e_1(x).$$

$$\bullet \varphi(e_2)(x) = \int_0^1 e_2(x+t) dt = \int_0^1 (x+t)^2 dt = \int_0^1 x^2 + 2xt + t^2 dt = \left[x^2.t + xt^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = x^2 + x + \frac{1}{3} = e_2(x) + e_1(x) + \frac{1}{3}e_0(x).$$

$$\text{Ainsi : } \varphi(e_0) = e_0, \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \text{ et } \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2.$$

3. **Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E .**

φ est une AL. Il s'agit de montrer que si $P \in E$, alors $\varphi(P) \in E$.

Soit $P = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$ un polynôme de E . On a par linéarité de φ : $\varphi(P) = \alpha \varphi(e_0) + \beta \varphi(e_1) + \gamma \varphi(e_2)$.

Or, d'après la question précédente : $\varphi(e_0) \in E$, $\varphi(e_1) \in E$ et $\varphi(e_2) \in E$ donc $\varphi(P) \in E$.

4. **Déterminer une base de l'image de φ puis en déduire que c'est un automorphisme de E .**

• Méthode 1 : La famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E . On a donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi) &= \text{Vect}(\varphi(e_0), \varphi(e_1), \varphi(e_2)) \\ &= \text{Vect}\left(e_0, \frac{1}{2}e_0 + e_1, \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2\right) \quad \text{d'après les calculs précédents} \\ &= \text{Vect}\left(1, \frac{1}{2} + t, \frac{1}{3} + t + t^2\right) \end{aligned}$$

Or, la famille $(f_0, f_1, f_2) = \left(1, \frac{1}{2} + t, \frac{1}{3} + t + t^2\right)$ est libre comme famille de polynômes de degrés échelonnés. Comme elle engendre $\text{Im}(\varphi)$, la famille (f_0, f_1, f_2) est une base de $\text{Im}(\varphi)$.

Ainsi, on a : $\text{rg}(\varphi) = 3 = \dim(E)$ donc φ est surjective. Comme φ est un endomorphisme de E , on en déduit que φ est bijective (caractérisation de la bijectivité des endomorphismes) donc que c'est un automorphisme.

• Méthode 2 : La famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E . On a donc

$$\begin{aligned} \text{Im}(\varphi) &= \text{Vect}(\varphi(e_0), \varphi(e_1), \varphi(e_2)) \\ &= \text{Vect}\left(\underbrace{e_0}_{f_0}, \underbrace{\frac{1}{2}e_0 + e_1}_{f_1}, \underbrace{\frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2}_{f_2}\right) \quad \text{d'après les calculs précédents} \\ &= \text{Vect}\left(e_0, \underbrace{e_1}_{f_1 - 1/2 f_0}, \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2\right) \\ &= \text{Vect}\left(e_0, e_1, \underbrace{e_2}_{f_1 - 1/2 e_0 - e_1}\right) \\ &= \text{Vect}(e_0, e_1, e_2) = E \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Im}(\varphi) = E$ donc φ est surjective. Comme φ est un endomorphisme de E , on en déduit que φ est bijective (caractérisation de la bijectivité des endomorphismes) donc que c'est un automorphisme.

- EXERCICE 7 -

On considère l'application : $f: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$
 $P \mapsto Q(X) = P(X+1) - P(X)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

On a :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda R) &= (P + \lambda R)(X+1) - (P + \lambda R)(X) \\ &= P(X+1) + \lambda R(X+1) - P(X) - \lambda R(X) \\ &= P(X+1) - P(X) + \lambda(R(X+1) - R(X)) \\ &= f(P) + \lambda f(R) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer une base de l'image de f .

Notons $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)) \\ &= \text{Vect}(0, 1, 2X + 1, 3X^2 + 3X + 1) \quad \text{après calculs (cf ci-dessous pour } f(P_3)) \\ &= \text{Vect}(P_0, 2P_1 + P_0, 3P_2 + 3P_1 + P_0) \end{aligned}$$

car $f(P_3) = (X+1)^3 - X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1$ et de même pour les autres.

On en déduit que : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(P_0, 2P_1 + P_0, 3P_2 + 3P_1 + P_0)$.

La famille $(P_0, 2P_1 + P_0, 3P_2 + 3P_1 + P_0)$ est donc génératrice de $\text{Im}(f)$. Elle est libre car les polynômes sont de degrés échelonnés (ou le vérifier à la main). Donc c'est une base de $\text{Im}(f)$ et $\text{rg}(f) = 3$.

3. En déduire la dimension de $\ker(f)$ puis en déterminer une base.

D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$$

donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 3 = 1$.

Or d'après la question 2, $f(P_0) = 0$ donc le polynôme P_0 appartient à $\text{Ker}(f)$. Donc la famille (P_0) est une famille libre constituée d'un vecteur dans $\text{Ker}(f)$ qui est de dimension 1. Donc c'est une base de $\text{Ker}(f)$.

- EXERCICE 8 -

Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.

Je vous laisse le soin de vérifier que les applications sont linéaires.

Dans chaque cas, il s'agit de montrer que f est injective puis de conclure avec la caractérisation de la bijectivité lorsque $\dim(E) = \dim(F)$.

1. On trouve facilement : $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective.

Comme f est un endomorphisme, on en déduit que f est bijective. Donc f est un automorphisme.

2. En écrivant $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a : $P \in \text{Ker}(f) \iff P + P' = 0 \iff \dots \iff P = 0$.

Donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective.

Comme f est un endomorphisme, on en déduit que f est bijective. Donc f est un automorphisme.

3. On trouve facilement : $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective. Comme f est un endomorphisme, on en déduit que f est bijective. Donc f est un automorphisme.

4. En écrivant $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a :

$$P \in \text{Ker}(f) \iff (c, 2a + b, 2a) = (0, 0, 0) \iff (a, b, c) = (0, 0, 0) \iff P = 0.$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective.

Comme f est une application linéaire avec $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que f est bijective.

Donc f est un isomorphisme.

- EXERCICE 9 -

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer B^2 puis en déduire, en raisonnant par l'absurde, que B n'est pas inversible.

On obtient après calculs : $B^2 = 2B$.

Supposons B inversible. On a donc :

$$B^2 = 2B \iff B^2 B^{-1} = 2B B^{-1} \iff B = 2I$$

Ce qui est absurde car $B \neq 2I$ donc B n'est pas inversible.

- (b) Déterminer une base de $\text{Ker}(B)$ puis retrouver le résultat précédent.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(B) \iff BX = 0 \iff \dots \iff \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Ker}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Comme $\text{Ker}(B) \neq \{0\}$, la matrice B n'est pas inversible.

2. (a) Déterminer $\text{rg}(B - 2I)$ puis en déduire la dimension du noyau de la matrice $(B - 2I)$.

Le rang d'une matrice est le rang de ses colonnes. On a donc

$$\begin{aligned} \text{rg}(B - 2I) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{rg}(C_1, C_2, C_3) \\ &= \text{rg}(C_1) \quad \text{car } C_2 = -C_1 \text{ et } C_3 = C_1 \\ &= 1 \quad \text{car } C_1 \neq 0 \text{ donc libre} \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{rg}(B - 2I) = 1$.

On a alors d'après le théorème du rang :

$$\text{rg}(B - 2I) + \dim(\text{Ker}(B - 2I)) = 3 \quad \text{donc} \quad \dim(\text{Ker}(B - 2I)) = 3 - 1 = 2$$

- (b) Déterminer une base de $\text{Ker}(B - 2I)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker}(B - 2I) \iff (B - 2I)X = 0 \iff \dots \iff \begin{cases} y = x + z \\ z = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ x + z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Ker}(B - 2I) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ étant libre (2 vecteurs non colinéaires), elle constitue donc une base de $\text{Ker}(B - 2I)$.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 10 -

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM .

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi_A(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = \varphi_A(M) + \lambda \varphi_A(N)$$

Ainsi, φ_A est une application linéaire.

- De plus, $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi_A(M) = AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par produit de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.

Comme $AN = I \iff \varphi_A(N) = I$, il s'agit de trouver un antécédent de I par φ_A .

Or, si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors tout élément de l'espace d'arrivée $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet un unique antécédent par φ . En particulier la matrice identité admet un unique antécédent par φ .

Ainsi, il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$.

3. Montrer que φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si la matrice A est inversible.

- Supposons que φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Alors φ_A est bijectif donc, d'après la question précédente, il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$ ce qui prouve que la matrice A est inversible.
- Supposons que A est inversible.
Déterminons $\text{Ker}(\varphi_A)$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a, avec A inversible :

$$M \in \text{Ker}(\varphi_A) \iff \varphi_A(M) = 0 \iff AM = 0 \iff A^{-1}AM = A^{-1}0 \iff M = 0$$

Donc $\text{Ker}(\varphi_A) = \{0\}$ donc φ_A est injectif.

Comme φ_A est un endomorphisme, on en déduit que φ_A est bijectif ((caractérisation de la bijectivité des endomorphismes)).

Finalement, φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si la matrice A est inversible.

- EXERCICE 11 -

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

- Rappel : Pour montrer une inclusion entre deux ensembles ($F \subset G$ par exemple), on doit montrer que si x appartient à F , alors x appartient aussi à G .
- On a :

$$x \in \text{Ker}(f) \implies f(x) = 0 \implies f(f(x)) = f(0) \implies f^2(x) = 0 \implies x \in \text{Ker}(f^2)$$

donc $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

- On a :

$$x \in \text{Im}(f^2) \implies x = f^2(y) \text{ (avec } y \in E) \implies x = f(f(y)) \implies x = f(z) \text{ (avec } z = f(y) \in E) \implies x \in \text{Im}(f)$$

donc $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

2. Démontrer l'équivalence suivante : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

On montre les deux implications.

- Supposons $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
Il s'agit de montrer que si $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$, alors $x = 0$.
Soit $x \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.

Comme $x \in \text{Ker}(f)$, on a : $f(x) = 0$ et comme $x \in \text{Im}(f)$, on a : $x = f(y)$ avec $y \in E$.

On a alors : $f^2(y) = f(f(y)) = f(x) = 0$ donc $y \in \text{Ker}(f^2)$.

Or, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ donc $y \in \text{Ker}(f)$ et par conséquent $f(y) = 0$ soit $x = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \implies \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

- Supposons $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.

Comme on a vu en Q1 que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$, il reste à montrer que $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$. On a : $f^2(x) = 0$ soit $f(f(x)) = 0$ ce qui prouve que $f(x) \in \text{Ker}(f)$.

Or, $f(x) \in \text{Im}(f)$ (c'est l'image de x) donc $f(x) \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$.

Donc par hypothèse, on obtient $f(x) = 0$ soit $x \in \text{Ker}(f)$.

Ainsi, $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \implies \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.

Finalement : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$.