

- EXERCICE 1 -

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant calculer leur valeur.

1. $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
5. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$
2. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$
4. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$
6. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt$

- EXERCICE 2 -

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2t^2+1} dt$
3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x + \ln(x)} dx$
2. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$
4. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$
6. (*) $\int_{-\infty}^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$, avec $k \in \mathbb{N}$

- EXERCICE 3 -

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par : $h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

1. Étudier le signe de la fonction h .
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.
3. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ est convergente.

- EXERCICE 4 -

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. (a) Vérifier que la fonction f est paire.
(b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et donner sa valeur.
2. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge et donner sa valeur.
(b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge.
(c) En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge et donner sa valeur

- EXERCICE 5 -

On considère un entier naturel n .

1. (a) Justifier qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $\frac{(\ln(t))^n}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
(b) En déduire la convergence de l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^3} dt$.
2. (a) Calculer I_0 .
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n$.
(c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$.

- EXERCICE 6 -

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha+k)}$ et $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-at} (1-e^{-t})^n dt$.

1. Montrer que l'intégrale $I_0(\alpha)$ converge et déterminer sa valeur.
2. En déduire la nature de l'intégrale $I_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Intégrer par parties $\int_0^x e^{-at} (1-e^{-t})^n dt$ puis en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$.
4. En déduire, en raisonnant par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$

- EXERCICE 7 -

Soit f la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^2}$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge et déterminer sa valeur.
2. Déterminer les variations de f puis en déduire que pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \frac{1}{k(\ln(k))^2}.$$

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

- EXERCICE 8 -

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t}$ puis en déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - e^{-x}$ et $J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$.

2. Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!} x^n e^{-x}$.
3. En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ faisant intervenir une somme.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.
5. On note : $I_n = \int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))} dx$.

À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n)$$

Pour aller plus loin...**- EXERCICE 9 -**

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer le sens de variation de f .
3. On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.
Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.