

- EXERCICE 1 -**Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant calculer leur valeur.**

1. $t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $[-\infty, 0[$ donc $\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ impropre en $-\infty$.

On connaît une primitive (fonction presque de la forme $\frac{u'}{u^2}$). Soit $A \leq 0$.

$$\int_A^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \left[-\frac{1}{2(1+t^2)} \right]_A^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+A^2)} \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \text{ donc } \int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \text{ converge et vaut } -\frac{1}{2}.$$

2. $x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ impropre en $+\infty$.

On connaît une primitive (fonction presque de la forme $u'e^u$). Soit $A \geq 0$.

$$\int_0^A xe^{-x^2} dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^A = -\frac{e^{-A^2}}{2} + \frac{1}{2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \text{ donc } \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}.$$

3. $x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

Or, $x \mapsto xe^{-x^2}$ est impaire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ converge ssi $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ converge.

Or $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ converge (calcul précédent). Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ converge et vaut 0 par imparité.

4. $t \mapsto \frac{1}{3^t} = e^{-t \ln(3)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$ impropre en $+\infty$.

Soit $A \geq 2$.

$$\int_2^A \frac{1}{3^t} dt = \int_2^A 3^{-t} dt = \int_2^A e^{-t \ln(3)} dt = \left[-\frac{e^{-t \ln(3)}}{\ln(3)} \right]_2^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)}$$

donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$ converge et vaut $\frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)}$.

5. $x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ impropre en $+\infty$.

Soit $A > 0$. Par IPP avec $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$:

$$\int_0^A xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^A + \int_0^A e^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^A + [-e^{-x}]_0^A = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \text{ par CC et somme}$$

Donc $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ converge et vaut 1.

6. $t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^2}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt$ impropre en $+\infty$.

On connaît une primitive (fonction de la forme $\frac{u'}{u^2}$). Soit $A > 0$.

$$\int_2^A \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)} \right]_2^A = -\frac{1}{\ln(A)} + \frac{1}{\ln(2)} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)}$$

Donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt$ converge et vaut $\frac{1}{\ln(2)}$.

- EXERCICE 2 -**Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes.**

1. $t \mapsto \frac{1}{2t^2+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

On ne connaît pas de primitive donc TCIFP.

- Au voisinage de $+\infty$, on a : $\frac{1}{2t^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2t^2}$ par quotient.

- De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

- Enfin, $\forall t \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{2t^2+1} \geq 0$ et $\frac{1}{2t^2} \geq 0$.

Donc, d'après le TCIFP par équivalent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2+1} dt$ converge.

De plus, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{2t^2+1} dt$ converge (fonction continue sur $[0, 1]$)

Donc, d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2t^2+1} dt$ converge.

2. $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

- $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ car $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$.

- De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

- $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \geq 0$ et $\frac{1}{x^2} \geq 0$.

Donc, d'après le TCIFP par équivalent, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$ converge.

3. $t \mapsto \frac{1}{t^3 \ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

- On a pour $t \geq 3$: $\frac{1}{t^3 \ln(t)} \leq \frac{1}{t^3}$ car pour tout $t \geq 3$, $\ln(t) \geq 1$.

- De plus, $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$).

- $\frac{1}{t^3 \ln(t)} \geq 0$ et $\frac{1}{t^3} \geq 0$ pour $t \geq 3$.

Donc, d'après le TCIFP par inégalité, l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt$ converge.

De plus, l'intégrale $\int_2^3 \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt$ converge (fonction continue sur $[2, 3]$)

Donc, d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt$ converge.

4. $t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

- On a pour $t \geq 3$: $\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$ car pour tout $t \geq 3$, $\ln(t) \geq 1$.

- De plus, $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$).

- $\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \geq 0$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$ pour $t \geq 3$.

Donc, d'après le TCIFP par inégalité, l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ diverge donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ diverge.

5. $x \mapsto \frac{1}{e^x + \ln(x)}$ est continue (dénominateur non nul car $e^x + \ln(x) \geq e^x > 0$ sur $[1, +\infty[$) donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x + \ln(x)} dx$ est impropre en $+\infty$.

- On a : $e^x + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ car $\ln(x) = o(e^x)$ donc par quotient : $\frac{1}{e^x + \ln(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^x}$ soit $\frac{1}{e^x + \ln(x)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.

- Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge car $\int_1^A e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^A = -e^{-A} + e^{-1} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} e^{-1}$.

- $e^{-x} \geq 0$ et $\frac{1}{e^x + \ln(x)} \geq 0$ sur $[1, +\infty[$

Donc d'après le TCIFP, on en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x + \ln(x)} dx$ converge.

6. $u \mapsto u^k e^{-u^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

Or, la fonction $u \mapsto u^k e^{-u^2}$ est paire si k est pair et elle est impaire si k est impair.

Dans les deux cas, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$ converge.

Etude de $\int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$ impropre en $+\infty$.

- On a : $u^2 u^k e^{-u^2} = u^{k+2} e^{-u^2} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$ par CC. Ainsi, en remarquant que $u^2 u^k e^{-u^2} = \frac{u^k e^{-u^2}}{1/u^2}$, on obtient

$$\text{que : } \frac{u^k e^{-u^2}}{1/u^2} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0, \text{ c'est-à-dire : } u^k e^{-u^2} = o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

- De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} dx$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

- $u^{k+2} e^{-u^2} \geq 0$ et $\frac{1}{u^2} \geq 0$.

Donc, d'après le TCIFP par négligeabilité, l'intégrale $\int_1^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$ converge.

De plus, l'intégrale $\int_0^1 u^k e^{-u^2} du$ converge car la fonction est continue sur $[0, 1]$.

Donc, d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$ converge.

Ainsi, on a par parité :

- Si k pair, $u \mapsto u^k e^{-u^2}$ est paire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$ converge et vaut $2 \int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$.
- Si k impair, $u \mapsto u^k e^{-u^2}$ est impaire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u^k e^{-u^2} du$ converge et vaut 0.

- EXERCICE 3 -

On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par : $h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

1. **Étudier le signe de la fonction h .**

Pour tout $x > 0$, $1+x^2 > 0$ donc h est du signe de $\ln x$.

Donc pour $x \in]0; 1]$, $h(x) \leq 0$ et pour $x \in [1; +\infty[$, $h(x) \geq 0$.

2. **Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.**

- La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est impropre en $+\infty$.

- On pose $A \in [1; +\infty[$. Par intégration par parties avec $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto -\frac{1}{x}$, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, A]$, on a :

$$\int_1^A \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1$$

- Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1 = 1$.

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$.

3. **En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ est convergente.**

La fonction h est continue sur $[1; +\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ est impropre en $+\infty$.

- On a, au voisinage de $+\infty$: $1+x^2 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ donc par quotient : $h(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^2}$.

- D'après la question précédente, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente

- Les fonctions sont continues et positives sur $[1; +\infty[$ donc par TCIFP, l'intégrale $\int_1^{+\infty} h(x) dx$ est convergente.

- EXERCICE 4 -

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. (a) **Vérifier que la fonction f est paire.**

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t}{(e^t(e^{-t}+1))^2} = \frac{e^t}{e^{2t}(e^{-t}+1)^2} = \frac{e^{t-2t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = f(t)$$

donc la fonction f est paire.

- (b) **Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et donner sa valeur.**

La fonction f étant paire, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge ssi l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Cette dernière intégrale est impropre en $+\infty$. Pour $A > 0$, on a :

$$\int_0^A f(t) dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}} \right]_0^A = \frac{1}{1+e^{-A}} - \frac{1}{2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

On en déduit par parité que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$.

2. (a) **Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge et donner sa valeur.**

$t \mapsto te^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ impropre en $+\infty$.

Soit $A > 0$. Par IPP avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$:

$$\int_0^A te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^A + \int_0^A e^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^A + [-e^{-t}]_0^A = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{par CC et somme}$$

Donc $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge et vaut 1.

- (b) **En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge.**

- On a : $tf(t) = \frac{te^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \underset{+\infty}{\sim} te^{-t}$

- De plus, l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge d'après la question précédente.

- D'autre part, $tf(t) \geq 0$ et $te^{-t} \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi, d'après le TCIFP par équivalent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge.

- (c) **En déduire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge et donner sa valeur.**

Comme f est paire, la fonction $\begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & tf(t) \end{matrix}$ est impaire.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t) dt$ converge, on en déduit par imparité que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 tf(t) dt$

converge aussi et vaut $-\int_0^{+\infty} t f(t) dt$.

Donc d'après la relation de Chasles, $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = 0$.

- EXERCICE 5 -

On considère un entier naturel n .

1. (a) **Justifier qu'au voisinage de $+\infty$, on a :** $\frac{(\ln(t))^n}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(\ln(t))^n}{t^3}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t} = 0 \quad \text{par C.C}$$

Ainsi, $\frac{(\ln(t))^n}{t^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

- (b) **En déduire la convergence de l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^3} dt$.**

- On a vu que : $\frac{(\ln(t))^n}{t^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
- De plus, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).
- Les fonctions sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.

Donc, d'après le TCIFP par négligeabilité, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^n}{t^3} dt$ converge.

2. (a) **Calculer I_0 .**

On a : $I_0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ qui est impropre en $+\infty$ car $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Soit $A > 1$. On a :

$$\int_1^A \frac{1}{t^3} dt = \int_1^A t^{-3} dt = \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^A = \frac{A^{-2} - 1}{-2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

Donc $I_0 = \frac{1}{2}$.

- (b) **Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On va faire une IPP entre 1 et $A > 1$ sur l'intégrale $\int_1^A \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t^3} dt = \int_1^A (\ln(t))^{n+1} t^{-3} dt$ puis passer à la limite lorsque $A \rightarrow +\infty$.

Les fonctions $u : t \mapsto (\ln(t))^{n+1}$ et $v : t \mapsto \frac{t^{-2}}{-2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, A]$ donc par IPP, on a, avec

$u'(t) = (n+1)(\ln(t))^n \frac{1}{t}$ et $v'(t) = t^{-3}$:

$$\begin{aligned} \int_1^A \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t^3} dt &= \int_1^A (\ln(t))^{n+1} t^{-3} dt = \left[(\ln(t))^{n+1} \frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^A - \int_1^A (n+1)(\ln(t))^n \frac{1}{t} \frac{t^{-2}}{-2} dt \\ &= \frac{(\ln(A))^{n+1}}{-2A^2} + \frac{n+1}{2} \int_1^A \frac{(\ln(t))^n}{t^3} dt \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{(\ln(t))^{n+1}}{t^3} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{(\ln(A))^{n+1}}{-2A^2}}_{=0 \text{ par C.C}} + \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2} \int_1^A \frac{(\ln(t))^n}{t^3} dt = \frac{n+1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{(\ln(t))^n}{t^3} dt$$

soit, par convergence des intégrales : $I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n$.

- (c) **En déduire :** $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$

- $I_0 = \frac{1}{2} = \frac{0!}{2^1}$ donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, i.e $I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$. On a alors avec la question précédente :

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n = \frac{n+1}{2} \frac{n!}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

- EXERCICE 6 -

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha + k)}$ **et** $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n dt$.

1. **Montrer que l'intégrale $I_0(\alpha)$ converge et déterminer sa valeur.**

La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A > 0$, on a :

$$\int_0^A e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^A = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha A}) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha}$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

2. **En déduire la nature de l'intégrale $I_n(\alpha)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

- Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 - e^{-t})^n = 1$, on a : $e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n \sim e^{-\alpha t}$.

- Or $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge d'après la question précédente.

- Les fonctions sont continues et positives sur $[0, +\infty[$.

Donc d'après le TCIFP, $I_n(\alpha)$ converge également.

3. **Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.**

Intégrer par parties $\int_0^x e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n dt$ puis en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha + 1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\begin{cases} u = (1 - e^{-t})^n & u' = ne^{-t} (1 - e^{-t})^{n-1} \\ v' = e^{-\alpha t} & v = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, donc on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n dt &= \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n \right]_0^x - \int_0^x \frac{-n}{\alpha} e^{-t} e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^{n-1} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} (1 - e^{-x})^n + \frac{n}{\alpha} \int_0^x e^{-(\alpha+1)t} (1 - e^{-t})^{n-1} dt \end{aligned}$$

Les intégrales en jeu étant convergentes en $+\infty$, on peut passer à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, ce qui donne :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n dt = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} (1 - e^{-x})^n}_{=0 \text{ par produit}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha} \int_0^x e^{-(\alpha+1)t} (1 - e^{-t})^{n-1} dt$$

soit

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n dt = \frac{n}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+1)t} (1 - e^{-t})^{n-1} dt$$

On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}(\alpha + 1)$

4. **En déduire, en raisonnant par récurrence, que :** $\forall n \in \mathbb{N}, I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$

Montrons que la proposition $\mathcal{P}(n) : I_n(\alpha) = u_n(\alpha), \forall \alpha > 0$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a : $I_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha} = u_0(\alpha)$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} I_n(\alpha) &= \frac{n}{\alpha} I_{n-1}(\alpha+1) = \frac{n}{\alpha} u_{n-1}(\alpha+1) \\ &= \frac{n}{\alpha} \frac{(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha+1+k)} = \frac{n!}{\alpha \prod_{k=1}^n (\alpha+k)} \\ &= \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha+k)} = u_n(\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- EXERCICE 7 -

Soit f la fonction définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^2}$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge et déterminer sa somme.

$t \mapsto \frac{1}{t(\ln(t))^2}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt$ impropre en $+\infty$.

On connaît une primitive (fonction de la forme $\frac{u'}{u^2}$). Soit $A > 0$.

$$\int_2^A \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt = \left[-\frac{1}{\ln(t)} \right]_2^A = -\frac{1}{\ln(A)} + \frac{1}{\ln(2)} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)}$$

Donc $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2} dt$ converge et vaut $\frac{1}{\ln(2)}$.

2. Déterminer les variations de f puis en déduire que pour tout $k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \frac{1}{k(\ln(k))^2}.$$

- f est dérivable sur $[2; +\infty[$ comme quotient de dénominateur non nul et on a pour tout $t \in [2; +\infty[$ (dérivée du type $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$) :

$$f'(t) = -\frac{(\ln(t))^2 + 2\ln(t)}{t^2(\ln(t))^4} < 0$$

car $\ln(t) > 0$ sur $[2; +\infty[$. Ainsi, f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

- On veut encadrer une intégrale. On commence par encadrer l'intégrande. La variable d'intégration t vérifie : $k \leq t \leq k+1$. On a alors :

$$\begin{aligned} k &\leq t \leq k+1 \\ \Leftrightarrow f(k+1) &\leq f(t) \leq f(k) \quad \text{car } f \text{ est décroissante sur } [2, +\infty[\\ \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} &\leq f(t) \leq \frac{1}{k(\ln(k))^2} \\ \Leftrightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} dt &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k(\ln(k))^2} dt \quad \text{par croissance de l'intégrale } (k < k+1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \underbrace{\int_k^{k+1} 1 dt}_{=1} &\leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \frac{1}{k(\ln(k))^2} \underbrace{\int_k^{k+1} 1 dt}_{=1} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien : $\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \frac{1}{k(\ln(k))^2}$.

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

On étudie les sommes partielles en sommant la partie gauche de la relation précédente.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} &\leq \sum_{k=2}^N \int_k^{k+1} f(t) dt \\ \Leftrightarrow \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} &\leq \int_2^{N+1} f(t) dt \quad \text{d'après la relation de Chasles.} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=2}^N \frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} &\leq \int_2^{+\infty} f(t) dt \quad \text{car } f \text{ est positive} \end{aligned}$$

Comme $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ converge, la suite des sommes partielles est majorée.

De plus, la suite des sommes partielles est croissante car la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ est à termes positifs.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ converge.

- EXERCICE 8 -

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t}$ puis en déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

- On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t} = 0$ par croissances comparées.

- La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

★ Or, on a vu que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^n e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1/t^2} = 0$, ce qui se réécrit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1/t^2} = 0$ soit

$$t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

★ Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente car c'est un intégrale de Riemann avec $2 > 1$.

Comme les fonctions sont positives, on a d'après le TCIFP, $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

De plus, $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 f_n(t) dt$ est convergente.

Finalement, d'après la relation de Chasles, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - e^{-x}$ et $J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$.

2. Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!} x^n e^{-x}$.

Par IPP avec les fonctions $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \left[[-t^n e^{-t}]_0^x + \int_0^x n t^{n-1} e^{-t} dt \right] \\ &= \frac{1}{n!} \left[-x^n e^{-x} + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \right] \\ &= -\frac{1}{n!} x^n e^{-x} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{n!} x^n e^{-x} + J_{n-1}(x) \end{aligned}$$

3. En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ faisant intervenir une somme.

On réécrit la relation précédente sous la forme : $J_k(x) - J_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} x^k e^{-x}$ pour faire apparaître une

somme télescopique) puis on somme pour k entre 1 et n .

$$\sum_{k=1}^n J_k(x) - J_{k-1}(x) = \sum_{k=1}^n -\frac{1}{k!} x^k e^{-x}$$

soit

$$J_n(x) - J_0(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x}$$

puis comme $J_0(x) = 1 - e^{-x}$, on obtient :

$$J_n(x) = 1 - e^{-x} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x}$$

soit (en remarquant que $e^{-x} = \frac{1}{0!} x^0 e^{-x}$) : $J_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Il s'agit de passer à la limite quand $x \rightarrow +\infty$ dans la relation précédente.

On remarque que chaque terme de la somme tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x} = 0$ par CC).

Ainsi, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x} = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x}}_{=0} = 1$$

Ainsi, $\frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge et vaut $n!$.

5. On note : $I_n = \int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))} dx$.

A l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n)$$

Le changement de variable $t = n(1-x)$ donne $x = 1 - \frac{t}{n}$ puis $dx = -\frac{1}{n} dt$.

On applique alors le changement de variable et on manipule les exponentielles et le logarithme pour faire apparaître le résultat. Il faut y croire !

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))} dx = \int_n^0 e^{n(1-\frac{t}{n}+\ln(t/n))} \left(-\frac{1}{n} dt\right) \\ &= -\frac{1}{n} \int_n^0 e^n e^{-t} e^{n \ln(t/n)} dt \\ &= \frac{1}{n} e^n \int_0^n e^{-t} \left(\frac{t}{n}\right)^n dt = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n e^{-t} t^n dt = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n) \end{aligned}$$

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 9 -

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

$t \mapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$ est impropre en $+\infty$.

En $+\infty$, on a : $\frac{t^{-x}}{1+t} \sim \frac{1}{t^{x+1}}$.

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} dt$ converge ssi $x+1 > 1$ ssi $x > 0$ (intégrale de Riemann).

Les fonctions étant continues et positives, on a d'après le TCIFP : $\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$ converge ssi $x > 0$. Donc

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer le sens de variation de f .

Pour $0 < x < y$ et $t \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} 0 < x < y &\iff t^x \leq t^y \quad \text{car } u \mapsto t^u = e^{u \ln(t)} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff t^{-x} \geq t^{-y} \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \frac{t^{-x}}{1+t} \geq \frac{t^{-y}}{1+t} \quad \text{car } \frac{1}{1+t} > 0 \end{aligned}$$

et donc par croissance de l'intégrale, on a pour tout $A \geq 1$:

$$\int_1^A \frac{t^{-x}}{1+t} dt \geq \int_1^A \frac{t^{-y}}{1+t} dt$$

Les intégrales étant convergentes d'après la question précédente, on a donc en passant à la limite quand A tend vers $+\infty$:

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{t^{-y}}{1+t} dt = f(y)$$

Ainsi, $x < y \iff f(x) \geq f(y)$ donc f est décroissante.

3. On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.

Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

On trouve en rassemblant les deux intégrales et en factorisant :

$$f(x) + f(x+1) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1}}{1+t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1}}{1+t} (t+1) dt = \int_1^{+\infty} t^{-x-1} dt$$

Le calcul donne ensuite :

$$f(x) + f(x+1) = \int_1^{+\infty} t^{-x-1} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^{-x}}{-x} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A^{-x}}{-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Ainsi, en utilisant la décroissance de f , on en déduit que :

$$0 \leq f(x) \leq f(x) + f(x+1) \leq 2f(x)$$

soit

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \leq 2f(x)$$

• Limite en 0. Comme $\frac{1}{x} \leq 2f(x)$, on obtient par minoration : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

• Limite en $+\infty$. Comme $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par théorème d'encadrement.