

- EXERCICE 1 -

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^3.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^3$ est convergente.
3. (a) Montrer que u_{n+1} est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.
(b) En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.
(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.

- EXERCICE 2 -

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée $u_0 > 0$ et par la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{u_n} \right)$.

(b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} u_0}$.

(d) Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

(e) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

- EXERCICE 3 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n!}{n^n}$.

1. Montrer, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.
2. En déduire que $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$ puis montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. En déduire que la série de terme général u_n est convergente.
4. En déduire également que : $n! = o(n^n)$.

- EXERCICE 4 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n + 1}$.

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \frac{1}{n}$.
(c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1$.
(b) En déduire un équivalent de u_n puis la nature de la série $\sum u_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.
(a) Montrer que : $v_n \sim -\frac{1}{n^3}$.
(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $n^\alpha v_n$.

- EXERCICE 5 -

Rappel : Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que les sous-suites $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ les sommes partielles de la série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire, en utilisant le résultat donné en début d'énoncé, que la série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge.
3. La série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ est-elle absolument convergente?

- EXERCICE 6 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $v_n = S_n - \ln(n)$.

1. Quelle est la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Montrer que pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
3. En déduire la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.
5. Conclure que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite, appelée la constante d'Euler.
6. En déduire que : $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ puis donner un équivalent de S_n .

- EXERCICE 7 -

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n .
(b) En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
2. Pour tout $k \geq 1$, on pose : $u_k = f(k)$.
(a) Montrer que la série de terme général u_k est convergente.
(b) Établir que f est décroissante puis que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.
(c) En sommant cette dernière inégalité, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.
(d) Déduire des questions précédentes que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

- EXERCICE 8 -

Soit α est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha + k)}$.

1. (a) Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente. On note $\ell(\alpha)$ sa limite.
(b) Que peut-on déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
(c) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle.
Démontrer que : $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$.
(d) Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.
2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$.
(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n + \alpha}$.
(b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

- EXERCICE 9 -

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.
3. En déduire un programme en Python qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

- EXERCICE 10 -

Dans cet exercice, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.
(b) En déduire que : $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.
(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
(d) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.
(e) Conclure alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.
2. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
(b) En déduire, à l'aide de la question 1e que la série de terme général $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x) \ln(1-x)$$

- EXERCICE 11 -

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n} \right).$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2 .
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
(c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.
(d) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.
4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2^k} \right)$.
(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln \left(\frac{\ell}{u_n} \right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2^k} \right)$.
(c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 2c, que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln \left(\frac{\ell}{u_n} \right) \leq \frac{1}{2^n}$.
(d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}} \right)$.
(e) Justifier que, pour tout réel x , on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 12 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ et $v_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$.

1. Justifier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n^2}$.
2. Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par : $Q(x) = \sum_{j=1}^n \left(x - \frac{1}{j} \right)^2$.
(a) A l'aide de l'étude de Q , établir l'inégalité : $u_n^2 \leq n v_n$.
(b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{v_n}{u_n^2}$.