

- EXERCICE 1 -

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^3.$$

1. **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, puis en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0.**

Par récurrence :

- $u_0 = \frac{1}{2} \in]0; 1[$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $0 < u_n < 1$.
D'une part : $0 < u_n < 1 \implies 0 < u_n^2 < u_n \implies 0 < u_n^3 < u_n^2 < u_n$ donc $u_n - u_n^3 > 0$ soit $u_{n+1} > 0$.
D'autre part, $u_n > 0 \implies u_n^3 > 0 \implies u_n - u_n^3 < u_n < 1$ donc $u_{n+1} < 1$.
D'où le résultat.

Enfin, comme $u_{n+1} - u_n = -u_n^3 < 0$ la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers un réel ℓ vérifiant la relation : $\ell = \ell - \ell^3$ soit $\ell^3 = 0$ soit $\ell = 0$.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers 0.

2. **Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^3$ est convergente.**

Soit $N \in \mathbb{N}$. On fait apparaître une somme télescopique en remarquant que $u_n^3 = u_n - u_{n+1}$, ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^N u_n^3 = \sum_{n=0}^N u_n - u_{n+1} = u_0 - u_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_0 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Ainsi, la série de terme général u_n^3 converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^3 = u_0 = \frac{1}{2}$.

3. (a) **Montrer que u_{n+1} est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.**

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a : $u_n^3 = o(u_n)$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^3}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = 0$).

On donc : $u_{n+1} = u_n - u_n^3 \sim u_n$.

- (b) **En déduire que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est équivalent à u_n quand n tend vers $+\infty$.**

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - u_n^3} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n(1 - u_n^2)} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2}{u_n(1 - u_n^2)} = \frac{u_n}{1 - u_n^2} \sim u_n$$

car $1 - u_n^2 \sim 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- (c) **En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.**

On vient de voir que : $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim u_n$. Pour étudier la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, on va plutôt étudier la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ (car on remarque une somme télescopique) puis utiliser le TCSTP.

- On a : $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim u_n$
- Or, on a :

$$\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{N+1}} - \frac{1}{u_0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{par quotient car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est divergente.

- $u_n \geq 0$ et $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \geq 0$ (car (u_n) est décroissante).

Ainsi, d'après le TCSTP la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est divergente.

- EXERCICE 2 -

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée $u_0 > 0$ et par la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

1. **Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0$ donc la suite est croissante.

Supposons que la suite soit majorée. Étant croissante, elle converge donc vers un réel ℓ vérifiant : $\ell = \ell + \ell^2$ soit $\ell^2 = 0$ soit $\ell = 0$.

Or, comme $u_0 > 0$, on a par croissance de la suite $u_n \geq u_0$ et donc $\ell \geq u_0 > 0$. Contradiction avec $\ell = 0$.

Ainsi, la suite n'est pas majorée donc elle diverge vers $+\infty$ (car croissante).

2. **On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$.**

- (a) **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} = \frac{\ln(u_n^2(1 + \frac{1}{u_n}))}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \\ &= \frac{\ln(u_n^2) + \ln(1 + \frac{1}{u_n})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \\ &= \frac{2\ln(u_n)}{2^{n+1}} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{u_n})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \end{aligned}$$

- (b) **Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.**

D'une part, on a par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \geq 0 \iff x+1 \geq 1 \iff \ln(1+x) \geq 0$.

Pour l'autre inégalité, deux méthodes :

- La fonction de $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $] -1, +\infty[$ donc sa courbe est en-dessous de sa tangente en 0 d'équation : $y = g'(0)(x-0) + g(0)$ soit $y = x$. On a donc : $\forall x > -1$,

$$\ln(1+x) \leq x$$

- On peut aussi étudier les variations de la fonction $h : x \mapsto \ln(1+x) - x$ puis en déduire son signe et enfin l'inégalité demandée.

h est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, on a :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0 \quad \text{car} \quad -x \leq 0 \text{ et } 1+x > 0 \text{ sur } [0, +\infty[$$

Donc la fonction h est décroissante sur $[0, +\infty[$. Elle est donc majorée par $h(0) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $h(x) \leq 0$ soit : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.

- (c) **En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_0}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $x = \frac{1}{u_n} > 0$ (car $u_n > 0$) dans l'inégalité précédente, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{u_n} \\ \iff 0 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{u_n} \quad \text{car} \quad \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \\ \iff 0 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{u_0} \quad \text{car la suite est croissante donc } u_n \geq u_0 \implies \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_0} \end{aligned}$$

- (d) **Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}u_0}$
 - La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{n+1}u_0} = \frac{1}{2u_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente comme série géométrique ($0 < 1/2 < 1$).
 - Les séries sont à termes positifs.
- D'après le TCSTP, la série $\sum_{n \geq 0} v_{n+1} - v_n$ est convergente.

(e) **En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.**

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On remarque une somme télescopique, ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1} - v_n = v_N - v_0 \quad \text{soit} \quad v_N = v_0 + \sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1} - v_n$$

La série $\sum_{n \geq 0} v_{n+1} - v_n$ est convergente. Notons ℓ sa somme.

On a donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} v_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} v_0 + \sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1} - v_n = v_0 + \ell$ donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

- EXERCICE 3 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{n^n}$.

1. **Montrer, à l'aide de la formule du binôme de newton, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.**

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k (1)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + n \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \geq 2 \end{aligned}$$

2. **En déduire que $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$ puis montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.**

On a :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

puis par récurrence :

- $u_1 = 1 \leq \frac{1}{2^0}$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose : $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
Comme $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$, on a : $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$, ce qui donne en utilisant l'HR : $u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{2^n}$.
D'où le résultat.

3. **En déduire que la série de terme général u_n est convergente.**

- $0 < u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est convergente comme série géométrique ($0 < 1/2 < 1$).
- Les séries sont à termes positifs.

D'après le TCSTP, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

4. **En déduire également que : $n! = o(n^n)$.**

On a d'après les questions précédentes : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ce qui donne d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \text{soit} \quad n! = o(n^n).$$

- EXERCICE 4 -

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n + 1}$.

1. (a) **Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.**

Par récurrence :

- $u_0 = 1 > 0$

- Supposons $u_n > 0$, alors, on a clairement, $u_n + n + 1 > 0$ et donc $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n + 1} > 0$.

D'où le résultat.

(b) **En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{n}$.**

Comme $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n + n + 1 > n + 1$ donc par décroissance de la fonction inverse :

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n + 1} < \frac{1}{n + 1}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{n}$.

(c) **Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.**

On a vu que : $0 < u_n \leq 1/n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n = 0$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

2. (a) **Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1$.**

On revient à la définition de la suite (seule information donnée pour la suite) : $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n + 1}$ ce qui donne :

$$(n+1)u_{n+1} = \frac{n+1}{u_n + n + 1} \sim \frac{n+1}{n+1} = 1 \quad \text{car} \quad u_n \rightarrow 0 \Rightarrow u_n + n + 1 \sim n + 1$$

Ainsi, $(n+1)u_{n+1} \sim 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_{n+1} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1$.

On aurait aussi pu raisonner sur nu_n en utilisant l'expression valable pour $n \geq 1$: $u_n = \frac{1}{u_{n-1} + n}$ ce

qui donne $nu_n = \frac{n}{u_{n-1} + n}$ et faire le même raisonnement.

(b) **En déduire un équivalent de u_n puis la nature de la série $\sum u_n$.**

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 1$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{1/n} = 1$ soit $u_n \sim 1/n$.

On a alors :

- $u_n \sim 1/n$

- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

- Les séries sont à termes positifs.

D'après le TCSTP, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge également.

3. **Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.**

(a) **Montrer que : $v_n \sim -\frac{1}{n^3}$.**

On revient à la définition de la suite (u) , ce qui donne :

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{u_{n-1} + n} - \frac{1}{n} = \frac{-u_{n-1}}{n(u_{n-1} + n)}$$

Or on a : $u_{n-1} + n \sim n$ (car $u_{n-1} \rightarrow 0$).

D'autre part, on a : $u_{n-1} \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$.

Ainsi, on obtient par produit et quotient : $v_n = \frac{-u_{n-1}}{n(u_{n-1} + n)} \sim -\frac{1}{n^3}$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général $n^\alpha v_n$.

D'après la question précédente, on a : $n^\alpha v_n \sim -\frac{n^\alpha}{n^3} = -\frac{1}{n^{3-\alpha}}$.

On étudie plutôt la série $\sum -n^\alpha v_n$ pour travailler avec des séries à termes positifs.

On a alors : $-n^\alpha v_n \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ donc les séries $\sum -n^\alpha v_n$ et $\sum \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ sont de même nature.

Or, $\sum \frac{1}{n^{3-\alpha}}$ converge ssi $3 - \alpha > 1$ (série de Riemann) donc ssi $\alpha < 2$.

- EXERCICE 5 -

Rappel : Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que les sous-suites $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ les sommes partielles de la série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

- On a :

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+1} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

donc la suite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- De même, on a :

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

donc la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

- Enfin, on a :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \rightarrow 0$$

donc les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2. En déduire, en utilisant le résultat donné en début d'énoncé, que la série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

Comme les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite ℓ .

Ainsi, les suites d'indices pairs et impairs de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ℓ donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .

Comme il s'agit des sommes partielles de la série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$, on en déduit que cette série converge.

3. La série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ est-elle absolument convergente?

On a : $\sum \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum \frac{1}{k}$ diverge (série harmonique).

Donc la série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ n'est pas absolument convergente.

Remarque : voici un exemple de série qui est convergente mais pas absolument convergente.

- EXERCICE 6 -

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $v_n = S_n - \ln(n)$.

1. Quelle est la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

La série harmonique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ diverge donc la limite de la suite (S_n) est $+\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

- Méthode 1 : on fait deux études de fonctions (mais c'est long!).

On pose $g : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x}$ et on montre que g est négative.

On pose $h : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$ et on montre que h est positive.

- Méthode 2 : on utilise une intégrale (à privilégier).

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $t \in [x, x+1]$:

$$\begin{aligned} x \leq t \leq x+1 &\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \int_x^{x+1} \frac{1}{x+1} dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{x+1} \frac{1}{x} dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{x+1} \int_x^{x+1} 1 dt \leq [\ln(t)]_x^{x+1} \leq \frac{1}{x} \int_x^{x+1} 1 dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- Méthode 3 : on utilise l'IAF avec la fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ entre x et $x+1$.

On pose $f(t) = \ln(t)$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(t) = \frac{1}{t}$.

Ainsi, pour tout $t \in [x, x+1]$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq f'(t) \leq \frac{1}{x}$.

D'après l'IAF, on a pour tout $(a, b) \in [x, x+1]$ avec $a < b$:

$$\frac{1}{x+1}(b-a) \leq \ln(b) - \ln(a) \leq \frac{1}{x}(b-a)$$

soit pour $a = x$ et $b = x+1$:

$$\frac{1}{x+1}(x+1-x) \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}(x+1-x)$$

soit

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

3. En déduire la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Calculons $v_{n+1} - v_n$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0 \quad \text{d'après la question précédente avec } x = n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. **Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.**

En sommant l'inégalité de droite de la question 2 entre $x = 1$ et $x = n$, on obtient :

$$\sum_{x=1}^n \ln(x+1) - \ln(x) \leq \sum_{x=1}^n \frac{1}{x} \implies \ln(n+1) - \ln(1) \leq S_n \\ \implies \ln(n+1) \leq S_n$$

Or, $\ln(n) \leq \ln(n+1)$ donc $\ln(n) \leq S_n$, ce qui donne alors : $v_n = S_n - \ln(n) \geq 0$.

5. **Conclure que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ sa limite, appelée la constante d'Euler.**

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

6. **En déduire que : $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ puis donner un équivalent de S_n .**

D'après la question précédente, on a :

$v_n \rightarrow \gamma$ soit $S_n - \ln(n) \rightarrow \gamma$ soit $S_n - \ln(n) - \gamma \rightarrow 0$, ce qui peut s'écrire :

$S_n - \ln(n) - \gamma = o(1)$ et donc $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Comme $\gamma + o(1)$ est négligeable devant $\ln(n)$, on en déduit que $S_n \sim \ln(n)$.

- EXERCICE 7 -

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. (a) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n .**

$x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ est continue sur $[n, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.

Soit $A > n$. On a :

$$\int_n^A \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_n^A = -e^{\frac{1}{A}} + e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} - 1$$

donc l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et on a : $I_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$.

- (b) **En déduire que $I_n \sim \frac{1}{n}$.**

On a au voisinage de 0 : $e^u - 1 \sim u$. Donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a : $I_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$.

2. **Pour tout $k \geq 1$, on pose : $u_k = f(k)$.**

- (a) **Montrer que la série de terme général u_k est convergente.**

• On a : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{k}} = 1$ donc $u_k = \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2} \sim \frac{1}{k^2}$.

• $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

• Les termes généraux sont positifs.

D'après le TCSTP, $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge également.

- (b) **Établir que f est décroissante puis que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.**

f est dérivable sur $[n, +\infty[$ comme composée et quotient de dénominateur non nul et on a :

$$f'(x) = \frac{-1/x^2 e^{\frac{1}{x}} x^2 - 2x e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{-e^{\frac{1}{x}} - 2x e^{\frac{1}{x}}}{x^4} < 0$$

donc f est décroissante. On a alors pour tout $x \in [k, k+1]$

$$k \leq x \leq k+1$$

$$\iff f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \text{par décroissance de } f$$

$$\iff \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \quad \text{par croissance de l'intégrale car } k < k+1$$

$$\iff f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$$

$$\text{car } \int_k^{k+1} f(k+1) dx = f(k+1) \int_k^{k+1} 1 dx = f(k+1).$$

- (c) **En sommant cette dernière inégalité, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$**

Comme la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge on peut écrire :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$$

$$\iff \sum_{k=n}^{+\infty} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$$

$$\iff \sum_{k=n}^{+\infty} u_{k+1} \leq \int_n^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$\iff \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \int_n^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + u_n$$

$$\text{soit : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

- (d) **Déduire des questions précédentes que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \frac{1}{n}$**

On a d'après la question précédente :

$$1 \leq \frac{I_n}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k} \leq 1 + \frac{1/n^2 e^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}$$

Or, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n^2 e^{\frac{1}{n}} = 0$ par produit et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = K$ finie, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n^2 e^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k} = 0$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k} = 1 \text{ donc : } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim_{n \rightarrow +\infty} I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}.$$

- EXERCICE 8 -

Soit α est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha + k)}$.

1. (a) **Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente. On note $\ell(\alpha)$ sa limite.**

Comme $u_n(\alpha)$ est écrit sous forme de produit et quotient, il est judicieux d'étudier le quotient $\frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)}$ pour obtenir la monotonie de la suite. C'est possible car il est clair que $u_n(\alpha)$ est positif. On a :

$$\frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} = \frac{\frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1} (\alpha + k)}}{\frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha + k)}} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{\prod_{k=0}^n (\alpha + k)}{\prod_{k=0}^{n+1} (\alpha + k)} = \frac{n+1}{\alpha + n + 1}$$

car les produit se simplifient et il ne reste que le dernier terme au dénominateur.

Or, $\frac{n+1}{\alpha+n+1} < 1$ car $\alpha > 0$ donc $\alpha+n+1 > \alpha+n$. Ainsi, la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0 ($u_n(\alpha) > 0$), elle est convergente.

- (b) **Que peut-on déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?**

On reconnaît une série télescopique. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n=0}^N u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) = u_0(\alpha) - u_{N+1}(\alpha) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} - \ell(\alpha)$$

Ainsi, la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$ est convergente.

- (c) **On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que :** $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$.

On remarque que :

$$u_{n+1}(\alpha) = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1} (\alpha+k)} = \frac{(n+1)}{\prod_{k=0}^n (\alpha+k)} \frac{n!}{(\alpha+n+1)} = \frac{(n+1)}{(\alpha+n+1)} u_n(\alpha)$$

ce qui donne :

$$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) = u_n(\alpha) \left(1 - \frac{(n+1)}{(\alpha+n+1)} \right) = u_n(\alpha) \frac{\alpha}{(\alpha+n+1)}$$

Or, comme $\ell(\alpha) \neq 0$ par hypothèse, on a : $\frac{u_n(\alpha)}{\ell(\alpha)} \rightarrow 1$ (on peut faire le quotient) donc $u_n(\alpha) \sim \ell(\alpha)$.

De plus, on a : $\alpha+n+1 \sim n$.

Donc par quotient, on obtient : $u_n(\alpha) \frac{\alpha}{(\alpha+n+1)} \sim \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$ donc $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$.

- (d) **Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.**

D'après la question précédente, on a : $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$.

De plus la série $\sum \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n} = \alpha \ell(\alpha) \sum \frac{1}{n}$ diverge.

Comme les séries sont à termes positifs, on en déduit d'après le TCSTP que la série $\sum u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)$

diverge également, en contradiction avec la question 1b.

Ainsi, l'hypothèse de la question précédente ($\ell(\alpha) \neq 0$) est fautive donc $\ell(\alpha) = 0$.

2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1[$.

- (a) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n+\alpha}$.

Comme $\alpha \in]0, 1[$, on a pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$(\alpha+k) \leq k+1 \text{ donc } \frac{1}{(\alpha+k)} \geq \frac{1}{k+1} \text{ et donc } \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha+k)} \geq \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)} = \frac{1}{n!}.$$

Ainsi, on a :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha+k)} = \frac{n!}{(\alpha+n) \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha+k)} \geq \frac{n!}{(\alpha+n)n!} = \frac{1}{\alpha+n}$$

Voici une autre manière de l'écrire plus visuelle :

$$\begin{aligned} u_n(\alpha) &= \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha+k)} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}{\alpha \times (\alpha+1) \times (\alpha+2) \times \dots \times (\alpha+n-1) \times (\alpha+n)} \\ &= \frac{1}{(\alpha)} \frac{2}{(\alpha+1)} \frac{3}{(\alpha+2)} \dots \frac{n}{(\alpha+n-1)} \frac{1}{(\alpha+n)} \\ &\geq \frac{1}{\alpha+n} \end{aligned}$$

car les n premiers termes sont tous supérieurs à 1 car $\alpha < 1$.

- (b) **Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?**

D'après la question précédente, on a : $u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n+\alpha}$.

De plus, $\alpha \in]0; 1[$ donc $\frac{1}{n+\alpha} > \frac{1}{n+1}$.

De plus la série $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge (série harmonique).

Comme les séries sont à termes positifs, on en déduit d'après le TCSTP que la série $\sum u_n(\alpha)$ diverge également.

- EXERCICE 9 -

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 e^x$.

1. **Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.**

$$\text{On a : } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3 e^n}.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^3 e^n > n^3$ donc $\frac{1}{n^3 e^n} \leq \frac{1}{n^3}$.

• $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$).

• Les séries sont à termes positifs.

Ainsi, d'après le TCSTP, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3 e^n}$ converge également.

2. **Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$.**

On a :

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{f(k)} \right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 e^k} \text{ car } f \text{ est positive} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{e^k} \text{ car } \frac{1}{k^3 e^k} \leq \frac{1}{e^k} \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{e^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^k = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^{i+n+1} = \frac{1}{e^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^i = \frac{1}{e^{n+1}} \frac{1}{1-1/e} = \frac{1}{(e-1)e^n}$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

3. **En déduire une fonction en Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.**

D'après la question précédente, comme $\frac{1}{(e-1)e^n} \rightarrow 0$, le théorème des gendarmes implique que

$\left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \rightarrow 0$. Ainsi, une valeur approchée de S est donnée par $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)}$. Pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-4} , il suffit de prendre la première valeur de n pour laquelle $\frac{1}{(e-1)e^n}$ est inférieure à 10^{-4} .

```
1 n = 1
2 S = 1/(n^3*exp(n))
3 while (np.exp(1)-1)*np.exp(n) > 10^(-4) :
4     n = n+1
5     S = S + 1/(n^3*exp(n))
```

- EXERCICE 10 -

Dans cet exercice, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. (a) **Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\sum_{p=1}^n t^{p-1}$.**

On a, en posant $k = p - 1$:

$$\sum_{p=1}^n t^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

- (b) **En déduire que :** $\sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

En intégrant la relation précédente entre 0 et x , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum_{p=1}^n t^{p-1} dt &= \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\ &= [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \\ &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\int_0^x \sum_{p=1}^n t^{p-1} dt = \sum_{p=1}^n \int_0^x t^{p-1} dt = \sum_{p=1}^n \left[\frac{t^p}{p} \right]_0^x = \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p}$$

d'où le résultat.

- (c) **Montrer que :** $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

On demande d'encadrer une intégrale. On commence par encadrer l'intégrande. On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq x &\iff 1-x \leq 1-t \leq 1 \\ &\iff 0 \leq 1 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x} \quad \text{car } t \geq 0 \\ &\iff 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt \quad \text{par croissance de l'intégrale car } x \geq 0 \\ &\iff 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

- (d) **En déduire que :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

Comme $x \in [0, 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-x} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$

ce qui donne d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

- (e) **Conclure alors que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que :** $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

On a d'après les questions précédentes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = -\ln(1-x)$$

ce qui prouve que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente et que : $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

2. (a) **Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :** $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

On a ;

$$\frac{x^{n+1}}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)x^{n+1} - nx^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

- (b) **En déduire, à l'aide de la question 1e que la série de terme général $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente et que :**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x) \ln(1-x)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{x^k}{k} \\ &= x \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n} - \left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{x^k}{k} - x \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -x \ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x) \quad \text{d'après la question 1e} \\ &= x + (1-x) \ln(1-x) \end{aligned}$$

- EXERCICE 11 -

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n} \right).$$

1. **Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0 , u_1 et u_2 .**

On a :

$$\bullet u_0 = 1 + \frac{1}{2^0} = 2$$

$$\bullet u_1 = \left(1 + \frac{1}{2^0} \right) \left(1 + \frac{1}{2^1} \right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

$$\bullet u_2 = \left(1 + \frac{1}{2^0} \right) \left(1 + \frac{1}{2^1} \right) \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) = \frac{15}{4}$$

2. (a) **Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.**

On a $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2^0} \right)}_{=2} \underbrace{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k} \right)}_{\geq 1} \geq 2$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 2$.

Remarque : On peut aussi faire une récurrence.

- (b) **Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = u_n + \frac{1}{2^{n+1}} u_n$$

donc

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \text{car} \quad u_n \geq 0$$

donc la suite u est croissante.

- (c) **Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a : $\ln(1+x) \leq x$.**

Deux méthodes :

- La fonction de $h : x \mapsto \ln(1+x)$ est concave donc sa courbe est en-dessous de sa tangente en 0 d'équation : $y = h'(0)(x-0) + h(0)$ soit $y = x$. On a donc : $\forall x > -1$,

$$\ln(1+x) \leq x$$

- On peut aussi étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$ puis en déduire son signe et enfin l'inégalité demandée.

- (d) **En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.**

Tous les termes du produit étant strictement positifs, on peut calculer $\ln(u_n)$:

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

En utilisant la question précédente avec $x = \frac{1}{2^k} > -1$, on obtient

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

et en sommant terme à terme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

On a donc : $\ln(u_n) \leq 2$ pour tout entier n .

3. **En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2, e^2]$.**

Par croissance de la fonction exponentielle, on a :

$$\ln(u_n) \leq 2 \implies u_n \leq e^2$$

Ainsi, la suite u est croissante et majorée par e^2 donc elle converge vers une limite ℓ .

De plus, on a vu que

$$2 \leq u_n \leq e^2$$

donc en passant à la limite, on obtient :

$$\ell \in [2, e^2]$$

4. **On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.**

- (a) **Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.**

Comme $\ln$ est continue en $\ell > 0$, on a :

$$\ln(u_n) \rightarrow \ln(\ell)$$

donc la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\ell)$.

Or $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ donc

$$\sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \xrightarrow{+\infty} \ln(\ell)$$

ce qui signifie que la suite des sommes partielles converge donc que la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ converge.

Ainsi, $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

- (b) **Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.**

Comme u_n et ℓ sont strictement positifs, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

$$\text{On a bien : } \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

- (c) **Vérifier, en utilisant le résultat de la question 2c, que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.**

Tout d'abord, la suite u est croissante et converge vers ℓ . On a donc :

$$u_n \leq \ell \quad \text{donc} \quad \ln(u_n) \leq \ln(\ell)$$

donc

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \ln(\ell) - \ln(u_n) \geq 0$$

D'autre part, d'après la question 2c, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

Ainsi, on a en sommant terme à terme :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

- (d) **Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.**

D'une part, on a déjà vu que $u_n \leq \ell$ à la question précédente donc on a bien : $\ell - u_n \geq 0$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right) &\iff \ell - u_n - \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right) \leq 0 \\ &\iff -u_n + \ell e^{-\frac{1}{2^n}} \leq 0 \\ &\iff \ell \leq u_n e^{\frac{1}{2^n}} \\ &\iff \frac{\ell}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}} \quad \text{car } u_n > 0 \\ &\iff \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{car } \ln \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Cette dernière relation étant vraie d'après la question précédente.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right)$$

- (e) **Justifier que, pour tout réel x , on a $1 - e^{-x} \leq x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.**

Deux méthodes :

- La fonction de $k : x \mapsto \exp(-x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 d'équation : $y = k'(0)(x-0) + k(0)$ soit $y = 1 - x$. On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(-x) \geq 1 - x$$

soit

$$1 - e^{-x} \leq x$$

- On peut aussi étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto 1 - e^{-x} - x$ puis en déduire son signe et enfin l'inégalité demandée.

En prenant maintenant $x = \frac{1}{2^n}$, on obtient :

$$1 - e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$$

et le résultat de la question précédente donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

On a :

- La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est à termes positifs
- La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente (série géométrique avec $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$)
- $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$

Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que : la série de terme général $(\ell - u_n)$ est également convergente.

- (b) **En déduire la nature de la série de terme général $\frac{v_n}{u_n^2}$.**

D'après la question précédente, on a : $u_n^2 \leq n v_n$ donc $\frac{v_n}{u_n^2} \geq \frac{1}{n}$.

Or, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Les séries étant à termes positifs, on en déduit d'après le TCSTP que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{u_n^2}$ diverge également.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 12 -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ **et** $v_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$.

1. **Justifier la convergence de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n^2}$.**

La série de Riemann $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2}$ converge donc la suite (v_n) converge également (il s'agit des sommes partielles de la série).

D'autre part, la série harmonique $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j}$ diverge donc la limite de la suite (u_n) est $+\infty$.

Par quotient de limites, on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n^2} = 0$.

2. **Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par :** $Q(x) = \sum_{j=1}^n \left(x - \frac{1}{j}\right)^2$.

- (a) **A l'aide de l'étude de Q , établir l'inégalité :** $u_n^2 \leq n v_n$.

On a :

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n \left(x - \frac{1}{j}\right)^2 = \sum_{j=1}^n x^2 - 2 \frac{1}{j} x + \frac{1}{j^2} = n x^2 - \left(2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\right) x + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} = n x^2 - 2 u_n x + v_n$$

Or, $Q(x)$ étant une somme de carrés, ce polynôme de degré 2 est positif donc son discriminant est négatif (il n'a pas de racines).

Ainsi, $\Delta = (-2 u_n)^2 - 4 n v_n \leq 0$, ce qui donne : $4 u_n^2 - 4 n v_n \leq 0$ soit $u_n^2 \leq n v_n$.