

**- EXERCICE 1 -**  
Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

On pose :  $u = (1, 2, -1)$ ,  $v = (1, 1, 0)$ ,  $w = (2, 0, 1)$ .

1. Calculer  $f(u)$ .
2. Montrer que  $\text{Ker}(f - id) = \text{Vect}(v, w)$ .
3. Montrer que  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  puis déterminer la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .
4. Déterminer les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$  puis calculer  $f^n(u)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**- EXERCICE 2 -**  
On note  $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $f$  l'application qui à toute matrice  $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  associe  $f(M) = M + (a + d)I_2$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $(J_1, J_2, J_3, J_4)$ .
3. (a) Montrer que  $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
(b) Déterminer la matrice  $D$  de  $f$  dans cette base.
4. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
5. Déterminer  $\text{rg}(f - 3id)$  puis en déduire la dimension de  $\text{Ker}(f - 3id)$  ainsi qu'une base de  $\text{Ker}(f - 3id)$ .

**- EXERCICE 3 -**  
Soit  $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$  qui à tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  associe  $\varphi(P)(X) = 2XP(X) - (X^2 - 1)P'(X)$ .

1. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .
2. Déterminer la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
3. L'endomorphisme  $\varphi$  est-il un automorphisme?
4. On admet que la famille  $\mathcal{B} = (1 - X^2, (1 + X)^2, (1 - X)^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .  
Déterminer la matrice  $D$  de l'endomorphisme  $\varphi$  relativement à la base  $\mathcal{B} = (1 - X^2, (1 + X)^2, (1 - X)^2)$ .
5. Déterminer une base de  $\text{Ker}(\varphi)$ .

**- EXERCICE 4 -**  
Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  et  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^4$  par :  $\begin{cases} \varphi(e_i) = e_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq 3 \\ \varphi(e_4) = e_1 \end{cases}$

1. Déterminer la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  puis calculer  $A^4$ .
2. En déduire que  $\varphi$  est un automorphisme et montrer que  $\varphi^{-1} = \varphi^3$ .

**- EXERCICE 5 -**  
On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  est  $A$ .

1. Déterminer  $\text{Ker}(A)$  puis donner le rang de la matrice  $A$ .
2. Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$  et une base de  $\text{Im}(f)$ .
3. (a) Calculer  $f^4$ .  
(b) En déduire qu'il n'existe pas d'automorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^4$  tel que  $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$ .

**- EXERCICE 6 -**  
On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et on considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 4A$ . La matrice  $A$  est-elle inversible?
2. Déterminer une base  $(u_1, u_2)$  du sous-espace  $\text{Ker}(f - 2id)$ .
3. (a) On pose  $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$ . Montrer que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
(b) Déterminer la matrice  $T$  de  $f$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$  et vérifier qu'elle est triangulaire.  
(c) En écrivant  $T = 2I + N$ , déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , la matrice  $T^n$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $N$ , puis de  $I$  et  $T$ .
4. On admet qu'il existe une matrice inversible  $P$  telle que :  $A = PTP^{-1}$ .  
Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^nI$  puis vérifier que cette formule reste valable pour  $n = -1$ .

**- EXERCICE 7 -**  
On considère les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ .

On munit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  de sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .  
Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice  $A$ .

1. Soient  $u, v$  et  $w$  les vecteurs définis par :  $w = (1, 0, 1)$ ;  $v = f(w) - w$  et  $u = f(v) - v$ .  
(a) Calculer les vecteurs  $v$  et  $u$ .  
(b) Démontrer que la famille  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
(c) Déterminer la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .  
(d) Montrer que la matrice  $P$  est inversible et vérifier que  $T = P^{-1}AP$  (sans calculer  $P^{-1}$ ).
2. (a) Soit  $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $N^2 = T$ , alors  $NT = TN$ .  
(b) En déduire alors que  $N$  est de la forme :  $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ , où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels.  
(c) Démontrer alors que l'équation matricielle  $N^2 = T$  admet exactement deux solutions :  $N_1$  et  $N_2$ .
3. Montrer que l'équation matricielle  $M^2 = A$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de  $P, P^{-1}, N_1$  et  $N_2$ .
4. L'ensemble  $E$  des matrices  $M$  appartenant à  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 = A$  est-il un espace vectoriel?

Pour aller plus loin...

**- EXERCICE 8 -**  
Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $f \neq 0$  et  $f \circ f = 0$ .

1. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que  $f$  n'est pas bijectif.
2. Montrer que  $\text{Im}(f)$  est inclus dans  $\text{Ker}(f)$  puis en déduire les dimensions de ces deux espaces vectoriels.
3. Soit  $u \in \mathbb{R}^3$  tel que  $u \notin \text{Ker}(f)$ .  
(a) Montrer que  $f(u) \in \text{Ker}(f)$ .  
(b) Justifier que l'on peut trouver un vecteur  $v$  appartenant à  $\text{Ker}(f)$  mais non colinéaire à  $f(u)$ .  
(c) Montrer que la famille  $(u, f(u), v)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  puis déterminer la matrice de  $f$  dans cette base.
4. Application. Soit  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .  
Vérifier que  $g$  vérifie les hypothèses de l'énoncé ( $g \neq 0$  et  $g \circ g = 0$ ) puis en utilisant l'étude précédente, déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $g$  est  $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .