

- EXERCICE 1 -

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On pose : $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1)$.

1. Calculer $f(u)$.

On calcule : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Comme $A = \text{Mat}_{b,c}(f)$, on en déduit que $f(u) = 2u$.

2. Montrer que $\text{Ker}(f - id) = \text{Vect}(v, w)$.

On a $\text{Mat}_{b,c}(f - id) = A - I$. On commence par déterminer $\text{Ker}(A - I)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in \text{Ker}(A - I) \iff (A - I)X = 0 \iff AX = X \iff \begin{cases} 2x - y - 2z = x \\ 2x - y - 4z = y \\ -x + y + 3z = z \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} x = y + 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\text{Ker}(A - I) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\text{Ker}(f - id) = \text{Vect}((1, 1, 0), (2, 0, 1)) = \text{Vect}(v, w)$.

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Je vous laisse vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est libre (en résolvant le système $au + bv + cw = 0$).

Ainsi, la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une famille libre composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

D'après les questions précédentes, on a :

- $f(u) = 2u$
- $v \in \text{Ker}(f - id)$ donc $(f - id)v = 0$ donc $f(v) - v = 0$ donc $f(v) = v$.
- De même, on a : $f(w) = w$.

Ainsi, la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est : $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Si on ne pense pas à utiliser la question précédente, on peut quand même calculer $f(v)$ et $f(w)$ en calculant AV et AW avec V et W les vecteurs colonnes associés à v et w .

4. Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ puis calculer $f^n(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note U' le vecteur des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}' = (u, v, w)$.

Comme $u = 1u + 0v + 0w$, on a : $U' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On va faire nos calculs matriciels dans la base $\mathcal{B}'$ donc on utilise la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ (les calculs seront plus simple elle est diagonale). Pour calculer $f^n(u)$, on va calculer $(A')^n U'$. On a alors :

$$(A')^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^n(u) = 2^n u + 0v + 0w = 2^n u$.

Remarque : On aurait pu aussi montrer par une récurrence simple que $f^n(u) = 2^n u$ en utilisant le fait que $f(u) = 2u$.

- EXERCICE 2

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**

Soit f l'application qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ associe $f(M) = M + (a + d)I_2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel. On a :

$$f(M + \lambda N) = (M + \lambda N) + (a + \lambda a' + d + \lambda d')I_2 = M + (a + d)I_2 + \lambda(N + (a' + d')I_2) = f(M) + \lambda f(N)$$

Donc f est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (somme de matrices) donc c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) .

On a :

- $f(J_1) = J_1 + 1 \cdot I_2 = 2J_1 + J_4$
- $f(J_2) = J_2 + 0 \cdot I_2 = J_2$
- $f(J_3) = J_3 + 0 \cdot I_2 = J_3$
- $f(J_4) = J_4 + 1 \cdot I_2 = J_1 + 2J_4$

$$\text{donc } A = \mathcal{M}_{b,c}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Je vous laisse vérifier que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre.

Ainsi, $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une famille libre composée de 4 vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est de dimension 4 donc c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.

Notons $\mathcal{B}'$ la base trouvée à la question précédente. On a d'après les calculs déjà effectués :

- $f(J_1 - J_4) = f(J_1) - f(J_4) = 2J_1 + J_4 - (J_1 + 2J_4) = J_1 - J_4$
- $f(J_2) = J_2$
- $f(J_3) = J_3$
- $f(I_2) = f(J_1 + J_4) = f(J_1) + f(J_4) = 2J_1 + J_4 + (J_1 + 2J_4) = 3(J_1 + J_4) = 3I_2$

$$\text{donc } D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La matrice $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ est inversible car diagonale sans zéro sur la diagonale donc f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Déterminer $\text{rg}(f - 3id)$ puis en déduire la dimension de $\text{Ker}(f - 3id)$ ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f - 3id)$.

- On va travailler dans la base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

$$\text{On a : } \text{rg}(D - 3I) = \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3.$$

Comme $D - 3I = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f - 3id)$, on a : $\text{rg}(f - 3id) = 3$.

- Comme $f - 3id$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(f - 3id)) + \text{rg}(f - 3id) \quad \text{soit } \dim(\text{Ker}(f - 3id)) = 4 - 3 = 1$$

On aurait également pu déterminer $\text{Ker}(D - 3I)$ par le théorème du rang (matriciel).

- On détermine à présent $\text{Ker}(f - 3id)$ en raisonnant matriciellement dans la base $\mathcal{B}'$. On cherche donc $\text{Ker}(D - 3I)$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(D - 3I) \iff \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \dots \iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Ker}(D - 3I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $D - 3I = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f - 3id)$, on a : $\text{Ker}(f - 3id) = \text{Vect}(I_2)$ car $\mathcal{B}' = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$.

- EXERCICE 3 -

Soit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ associe $\varphi(P)(X) = 2XP(X) - (X^2 - 1)P'(X)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme?
4. On admet que la famille $\mathcal{B} = (1 - X^2, (1 + X)^2, (1 - X)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Déterminer la matrice D de l'endomorphisme φ relativement à la base $\mathcal{B} = (1 - X^2, (1 + X)^2, (1 - X)^2)$.
5. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

- EXERCICE 4 -

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ par : $\begin{cases} \varphi(e_i) = e_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq 3 \\ \varphi(e_4) = e_1 \end{cases}$

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$ puis calculer A^4 .

$$\text{On obtient par définition de } A : A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } A^4 = I.$$

2. En déduire que φ est un automorphisme et montrer que $\varphi^{-1} = \varphi^3$.
D'après la question précédente, on a $A^4 = I$ donc $AA^3 = I$. Ainsi, la matrice A est inversible d'inverse A^3 donc on en déduit que φ est un automorphisme et que $\varphi^{-1} = \varphi^3$.

- EXERCICE 5 -

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A .

1. Déterminer $\text{Ker}(A)$ puis donner le rang de la matrice A .

$$\text{On obtient après calculs : } \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \dim(\text{Ker}(A)) = 1 \text{ car ce vecteur est non nul.}$$

On en déduit d'après le théorème du rang que : $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = 4$ soit $\text{rg}(A) = 3$.

2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
• On a d'après le calcul précédent : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$ donc $((1, 1, 1, 1))$ est une base de $\text{Ker}(f)$ (un vecteur non nul).
• On a avec des notations évidentes :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3) \quad \text{car } C_4 = -C_1 - C_2 - C_3$$

$$\text{donc } \text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Comme $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 3$, la famille $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

3. (a) Calculer f^4 .
On calcule A^2 puis $A^4 = A^2 \times A^2$ et on trouve $A^4 = 0$ donc $f^4 = 0$ (endomorphisme nul).

- (b) En déduire qu'il n'existe pas d'automorphisme g de $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$.
Supposons qu'il existe un automorphisme g de $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} g \circ f \circ g^{-1} = f^2 &\implies (g \circ f \circ g^{-1})^2 = f^4 = 0 \\ &\implies g \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ f \circ g^{-1} = 0 \\ &\implies g \circ f^2 \circ g^{-1} = 0 \\ &\implies f^2 = g^{-1} 0 g \\ &\implies f^2 = 0 \end{aligned}$$

Or $f^2 \neq 0$ (car $A^2 \neq 0$) donc il n'existe pas d'automorphisme g de $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$.

- EXERCICE 6 -

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice

$$\text{dans la base } \mathcal{B} \text{ est : } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^2 - 4A$. La matrice A est-elle inversible?

On obtient : $A^2 - 4A = -4I$.

Ainsi, on peut écrire : $A((-1/4)(A - 4I)) = I$ ce qui montre que la matrice A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 4I).$$

2. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace $\text{Ker}(f - 2id)$.

On détermine d'abord $\text{Ker}(A - 2I)$.

$$\text{On obtient : } \text{Ker}(A - 2I) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ ce qui donne } \text{Ker}(f - 2id) = \text{Vect}((1, 1, 0); (0, 1, 1)) = \text{Vect}(u_1; u_2).$$

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une famille libre donc une base de $\text{Ker}(f - 2id)$.

3. (a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a : $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$. Montrons que (u_1, u_2, u_3) est libre.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \iff a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 1) = 0 \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

Ainsi, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre composée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

- (b) Déterminer la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) et vérifier qu'elle est triangulaire.

Comme $u_1 \in \text{Ker}(f - 2id)$, on a $(f - 2id)(u_1) = 0$ donc $f(u_1) = 2u_1$.

De même : $f(u_2) = 2u_2$.

$$\text{Enfin, on a : } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u_3) = (3, 4, 3).$$

On "devine" les coefficients (sinon, on les trouve en résolvant un système) :

$$f(u_3) = (3, 4, 3) = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) + 2(1, 1, 1) \text{ soit } f(u_3) = u_1 + u_2 + 2u_3.$$

$$\text{On obtient donc : } T = \text{Mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (c) En écrivant $T = 2I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n , la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N , puis de I et T .

$$T = 2I + N \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme proposée incite à utiliser la formule du binôme de Newton.

Or, on a : $N^2 = 0$ et comme les matrices I et N commutent, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} = 2^n I + n2^{n-1} N$$

puis en écrivant $N = T - 2I$:

$$T^n = 2^n I + n2^{n-1} (T - 2I) = n2^{n-1} T - (n-1)2^n I$$

4. On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que : $A = PTP^{-1}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I$ puis vérifier que cette formule reste valable pour $n = -1$.

On a par récurrence immédiate : $A^n = PT^n P^{-1}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} A^n &= PT^n P^{-1} \\ &= P(n2^{n-1}T - (n-1)2^n I)P^{-1} \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= n2^{n-1}PTP^{-1} - (n-1)2^n PP^{-1} \\ &= n2^{n-1}A - (n-1)2^n I \end{aligned}$$

En remplaçant n par -1 , on retrouve bien la formule de A^{-1} trouvée à la première question.

- EXERCICE 7 -

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A .

1. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $w = (1, 0, 1)$; $v = f(w) - w$ et $u = f(v) - v$.

(a) Calculer les vecteurs v et u .

En notant $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient après calculs : $AW - W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Comme A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que : $v = f(w) - w = (1, 1, -3)$

De même, $AV - V = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc : $u = f(v) - v = (-6, -6, 0)$.

(b) **Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.**

Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est libre.

Soient alors $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $xu + yv + zw = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} xu + yv + zw = 0 &\iff x(-6, -6, 0) + y(1, 1, -3) + z(1, 0, 1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} -6x + y + z &= 0 \\ -6x + y &= 0 \\ -3y + z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -6x + y + z &= 0 \\ z &= 0 \\ -3y + z &= 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est libre et composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) **Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.**

On a d'après l'énoncé :

- $v = f(w) - w$ ce qui donne $f(w) = v + w$.
- $u = f(v) - v$ ce qui donne $f(v) = u + v$.

De plus, on a : $AU = A \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = U$, ce qui donne : $f(u) = u$.

Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

(d) **Montrer que la matrice P est inversible et vérifier que $T = P^{-1}AP$ (sans calculer P^{-1}).**

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_2$ du pivot de Gauss sur la matrice P donnent : $P \sim \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ce qui montre que P est inversible.

On vérifie alors par le calcul que $PT = AP$ ce qui permet d'écrire : $T = P^{-1}AP$.

2. (a) **Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$.**

Si $N^2 = T$, alors $NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN$ donc $NT = TN$.

(b) **En déduire alors que N est de la forme :** $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois réels.

En notant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a :

$$NT = TN \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = a+d \\ a+b = b+e \\ b+c = c+f \\ d = d+g \\ d+e = e+h \\ e+f = f+i \\ g = g \\ g+h = h \\ h+i = i \end{cases} \iff \begin{cases} a = e \\ d = 0 \\ b = f \\ g = 0 \\ e = i \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases},$$

ce qui donne bien $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

(c) **Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2 .**

D'après la question précédente, il s'agit de chercher les matrices N de la forme $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ qui

vérifie $N^2 = T$. Or, on a :

$$\begin{aligned} N^2 = T &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ b^2 + 2ac = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2a} \\ c = \frac{-b^2}{2a} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2a} \\ c = \frac{-b^2}{2a} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{8} \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui donne bien deux solutions :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. **Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2 .**

On a, en utilisant la relation $T = P^{-1}AP$ qui donne $A = PTP^{-1}$:

$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff M^2 = PTP^{-1} \\ &\iff P^{-1}M^2P = T \\ &\iff (P^{-1}MP)^2 = T \\ &\iff P^{-1}MP = N_1 \text{ ou } P^{-1}MP = N_2 \quad \text{d'après la question précédente} \\ &\iff M = PN_1P^{-1} \text{ ou } M = PN_2P^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation matricielle $M^2 = A$ admet exactement deux solutions : $M = PN_1P^{-1}$ et $M = PN_2P^{-1}$.

4. **L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel?**

La matrice nulle n'appartient pas à E ($O^2 \neq A$) donc E n'est pas un espace vectoriel.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 8 -

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

1. **Montrer, en raisonnant par l'absurde, que f n'est pas bijectif.**

Supposons f bijectif. Alors f^{-1} existe et on a alors :

$$f \circ f = 0 \implies f^{-1} \circ f \circ f = f^{-1} \circ 0 = 0 \implies f = 0$$

ce qui est contraire aux hypothèses. Donc f n'est pas bijectif.

2. **Montrer que $\text{Im}(f)$ est inclus dans $\text{Ker}(f)$ puis en déduire les dimensions de ces deux espaces vectoriels.**

• Il s'agit de montrer que si $x \in \text{Im}(f)$ alors $x \in \text{Ker}(f)$.

Soit $x \in \text{Im}(f)$. Alors, il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(y)$.

Ainsi : $f(x) = f(f(y)) = 0$ par hypothèse donc $x \in \text{Ker}(f)$.

Ainsi, on a bien : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

• D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$$

Mais comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, on en déduit que : $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f))$.

Ainsi, les seuls entiers susceptibles de vérifier le théorème du rang sont :

$$\dim(\text{Im}(f)) = 0 \text{ et } \dim(\text{Ker}(f)) = 3 \quad \text{ou} \quad \dim(\text{Im}(f)) = 1 \text{ et } \dim(\text{Ker}(f)) = 2$$

Comme $f \neq 0$, la première solution n'est pas possible et donc : $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

3. **Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $u \notin \text{Ker}(f)$.**

(a) **Montrer que $f(u) \in \text{Ker}(f)$.**

On a : $f(f(u)) = f^2(u) = 0$ car $f^2 = 0$ par hypothèse donc $f(u) \in \text{Ker}(f)$.

(b) **Justifier que l'on peut trouver un vecteur v appartenant à $\text{Ker}(f)$ mais non colinéaire à $f(u)$.**

Supposons que tout v appartenant à $\text{Ker}(f)$ soit colinéaire à $f(u)$. Alors, on aurait $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(f(u))$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. Or, on a vu que $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ donc il existe un vecteur v appartenant à $\text{Ker}(f)$ mais non colinéaire à $f(u)$.

(c) **Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de f dans cette base.**

Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} au + bf(u) + cv &= 0 \\ \implies af(u) + bf^2(u) + cf(v) &= f(0) \quad \text{en composant par } f \text{ et par linéarité} \\ \implies af(u) &= 0 \quad \text{car } f(u) \in \text{Ker}(f), v \in \text{Ker}(f) \\ \implies a &= 0 \quad \text{car } f(u) \neq 0 (u \notin \text{Ker}(f)) \end{aligned}$$

On a alors en utilisant que $f(u)$ et v sont non colinéaires donc forment une famille libre :

$$bf(u) + cv = 0 \implies \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $a = b = c = 0$ donc la famille $(u, f(u), v)$ est libre et composée de 3 vecteur de $\mathbb{R}^3$ avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{La matrice de } f \text{ dans cette base est : } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **Application. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.**

Vérifier que g vérifie les hypothèses de l'énoncé ($g \neq 0$ et $g \circ g = 0$) puis en utilisant l'étude précédente,

déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$A \neq 0$ et $A^2 = 0$ donc g vérifie les hypothèses de l'énoncé.

Pour obtenir la matrice demandée, il s'agit de suivre la méthode explicitée précédemment dans ce cas particulier.

• On cherche $u \notin \text{Ker}(g)$. Le vecteur $u = (0, 1, 0)$ n'appartient pas à $\text{Ker}(g)$ (car $g(u) \neq 0$).

• Puis, on obtient facilement : $\text{Ker}(g) = \text{Vect}((1, 0, 0); (0, 1, 1))$.

On a alors $g(u) = (1, -1, -1)$, et on choisit $v = (1, 0, 0) \in \text{Ker}(g)$ et non colinéaire à $g(u)$.

D'après l'étude précédente, la base $(u, g(u), v)$ répond à la question.