

- EXERCICE 1 -

1. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X .

2. Soit $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire de fonction de répartition F définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^\alpha & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X .

- EXERCICE 2 -

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- (a) Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.
 (b) Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dont une densité est la fonction f .

2. Mêmes questions avec $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{a \ln t}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

- EXERCICE 3 -

Pour éviter les problèmes techniques et simplifier les calculs, vous pouvez traiter cet exercice en posant $b = 1$.

Soient a et b deux réels strictement positifs et f la fonction sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ a \frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \end{cases}$.

- Démontrer que f est une densité de probabilité.
- Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f .
Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et donner sa valeur lorsqu'elle existe.
- On suppose dans cette question que $b = 1$ et on note $W = \ln(X)$.
 (a) Donner l'expression de F_X dans ce cas particulier ($b = 1$).
 (b) Déterminer la fonction de répartition F_W de W .

- EXERCICE 4 -

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- Montrer que g est une densité de probabilité. *On pourra commencer par étudier la parité de la fonction g .*
- On note X une variable aléatoire de densité g .

$$(a) \text{ Déterminer la fonction de répartition de } X. \text{ On obtient : } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln 2 \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{si } -\ln 2 \leq x < 0 \\ \frac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln 2 \\ 1 & \text{si } x > \ln 2 \end{cases}$$

- (b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. On pose $Y = |X|$.
 (a) Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité Y .
 (b) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Z = X^2$.
 (a) Montrer que Z est une variable à densité et déterminer une densité Z .
 (b) Montrer, en utilisant le théorème de transfert, que Z admet une espérance et la calculer.

- EXERCICE 5 -

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on notera U .
On dit que U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{ae^{-ax}}{(1 + e^{-ax})^2}$.
 (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
 (b) On note X une variable aléatoire de densité f . Déterminer la fonction de répartition de X .
3. On suppose que $a = 1$.
 (a) Montrer que la fonction h définie sur $]0, 1[$ par $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.
 (b) On pose $Z = \ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ où U est définie à la question 1.
 Déterminer $Z(\Omega)$ puis montrer que Z suit la même loi que X (avec $a = 1$).

- EXERCICE 6 -

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
 (b) Soit X une variable dont f est une densité. Déterminer la fonction de répartition de X , notée F .
 (c) Calculer $P(X \geq 4)$ puis $P_{[X \geq 4]}(X < 8)$.
 (d) X admet-elle une espérance?

On considère trois variables X_1, X_2, X_3 indépendantes et toutes de même loi que X .

- On pose $V = \sup(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une variable aléatoire.
 (a) Déterminer la fonction de répartition H de V .
 (b) Montrer que V est une variable à densité, et donner une densité de V .
 (c) La variable V admet-elle une espérance?
- On pose $U = \inf(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une variable aléatoire.
 (a) Déterminer la fonction de répartition G de U .
 (b) Montrer que U est une variable à densité, et donner une densité de U .
 (c) Montrer que U admet une espérance et la calculer.

- EXERCICE 7 -

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

- Montrer la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$.
- Étudier la parité de f puis montrer que f est une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire admettant f comme densité et F la fonction de répartition de X .

- X admet-elle une espérance?
- On pose $Y = \ln(1 + |X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
 (a) Déterminer $Y(\Omega)$
 (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F . *On ne cherchera pas à calculer F .*
 (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
 (d) Déterminer l'expression de g .

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 8 -

Pour tout réel x , on note $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire admettant comme

fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (Y = k) = (k \leq X < k + 1)$.

1.
 - (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
 - (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.
 - (c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
 - (d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .
2. On pose $Z = X - Y$.
 - (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
 - (b) Montrer que : $[(Z \leq x) \cap (Y = k)] = [k \leq X \leq k + x]$.
 - (c) En déduire que : $\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$.
 - (d) En déduire une densité f de Z .
 - (e) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z .