

- EXERCICE 1 -

Remarque : Dans cet exercice, on nous dit que F est une fonction de répartition, il est inutile de vérifier que F est croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$.

Il faut vérifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points puis vérifier que F est continue sur $\mathbb{R}$ (étudier éventuellement les limites aux points de recollement), puis la dériver pour obtenir une densité.

1. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X .

- F est nulle donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$.
 F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (ouvert en 0) comme somme, produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^1$.
Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- En particulier, F est continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} = 0 = F(0)$ donc F est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

Donc X une variable aléatoire à densité.

En dérivant F pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et en choisissant par exemple $f(0) = 0$, une densité f de X est :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x}{2}\right) e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Soit $\alpha > 0$ et X une variable aléatoire de fonction de répartition F définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^\alpha & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X .

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^\alpha & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- F est constante donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$.
 F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ comme somme et composée de fonctions $\mathcal{C}^1$.
Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
- En particulier, F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - (1 - x)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 = F(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - (1 - x)^\alpha = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1 = F(1)$ donc F est continue en 0 et en 1 donc sur $\mathbb{R}$.

Donc X une variable aléatoire à densité.

En dérivant F pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et en choisissant par exemple $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$, une densité f de X est :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha(1 - x)^{\alpha-1} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- EXERCICE 2 -

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} ax(1 - x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(a) Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

- $x(1 - x) \geq 0$ sur $[0, 1]$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$ ssi $a \geq 0$.
- f est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

- On cherche a tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Or, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 ax(1 - x) dx = a \int_0^1 x - x^2 dx = a \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{a}{6}$$

$$\text{donc } \int_{-\infty}^{+\infty} ax(1 - x) dx = 1 \iff a = 6.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $a = 6$.

- (b) Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de la variable X dont une densité est la fonction f .

- $E(X)$ existe

$$\text{ssi } \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \text{ converge absolument}$$

$$\text{ssi } \int_0^1 t f(t) dt = \int_0^1 at^2(1 - t) dt \text{ converge (car } f \text{ est nulle hors de } [0, 1]).$$

Cette dernière intégrale n'étant pas impropre, elle converge et $E(X)$ existe.

On obtient après calculs (en remplaçant a par 6) :

$$E(X) = \int_0^1 6t^2(1 - t) dt = 6 \int_0^1 t^2 - t^3 dt = \dots = \frac{1}{2}$$

- De même, $E(X^2)$ existe

$$\text{ssi } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \text{ converge absolument}$$

$$\text{ssi } \int_0^1 t^2 f(t) dt = \int_0^1 at^3(1 - t) dt \text{ converge.}$$

Cette dernière intégrale n'étant pas impropre, elle converge donc X admet un moment d'ordre 2 donc une variance.

On obtient après calculs (en remplaçant a par 6) :

$$E(X) = \frac{1}{2} \text{ et } E(X^2) = \int_0^1 6t^3(1 - t) dt = \dots = \frac{3}{10} \text{ on en déduit } V(X) = \frac{1}{20}.$$

2. Mêmes questions avec $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{a \ln t}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

- (a) $\ln(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 1$ donc h est positive sur $\mathbb{R}$ ssi $a \geq 0$.

- h est continue sur $]-\infty, 1[$ (constante) et sur $]1, +\infty[$ comme quotient de dénominateur non nul donc h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

- On cherche a tel que $\int_1^{+\infty} \frac{a \ln t}{t^3} dt = 1$ soit $a \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3} dt = 1$.

Cette intégrale est impropre en $+\infty$. On pose $A > 1$ puis on fait une IPP.

$$\int_1^A \frac{\ln t}{t^3} dt = \left[-\frac{\ln(t)}{2t^2} \right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{2t^3} dt = -\frac{\ln(A)}{2A^2} + \left[-\frac{1}{4t^2} \right]_1^A = -\frac{\ln(A)}{2A^2} - \frac{1}{4A^2} + \frac{1}{4} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}$$

$$\text{La condition } \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 1 \text{ donne } a = 4.$$

Ainsi, h est une densité de probabilité si et seulement si $a = 4$.

- (b) $E(X)$ existe

$$\text{ssi } \int_{-\infty}^{+\infty} t h(t) dt \text{ converge absolument}$$

$$\text{ssi } \int_1^{+\infty} t h(t) dt = 4 \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \text{ converge car } h \text{ est nulle sur }]-\infty, 1[.$$

On calcule par IPP l'intégrale $4 \int_1^A \frac{\ln t}{t^2} dt$ puis on fait tendre A vers ∞ .

$$\int_1^A \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{1}{t^2} dt = -\frac{\ln(A)}{A} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^A = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Ainsi, } E(X) \text{ existe et : } E(X) = 4 \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt = 4.$$

- Comme h est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a :

$$E(X^2) \text{ existe ssi } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 h(t) dt = \int_1^{+\infty} t^2 h(t) dt = 4 \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt \text{ converge.}$$

On calcule l'intégrale (intégrande de la forme $u' \times u$)

$$\int_1^A t^2 h(t) dt = 4 \int_1^A \frac{\ln t}{t} dt = 4 [\ln(\ln(t))]_1^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc $\int_1^{+\infty} t^2 h(t) dt$ diverge donc X n'admet pas de moment d'ordre 2.

Remarque :

On aurait pu aussi faire un TCIFP en remarquant que pour tout $t \geq 3$, $\frac{\ln t}{t} \geq \frac{1}{t} \geq 0$ et conclure que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt \text{ diverge car } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt \text{ diverge.}$$

- EXERCICE 3 -

Soient a et b deux réels strictement positifs et f la fonction sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ a \frac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq b \end{cases}$.

1. Démontrer que f est une densité de probabilité.

- f est positive sur $\mathbb{R}$ car $a > 0$ et $b > 0$.
- f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ comme constante sur $]-\infty, b[$ et comme quotient de dénominateur non nul sur $]b, +\infty[$ ($x \geq b > 0$).
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge ssi l'intégrale $\int_b^{+\infty} f(x) dx = \int_b^{+\infty} \frac{ab^a}{x^{a+1}} dx$ converge car $f = 0$ sur $]-\infty, b[$. Or, $x \mapsto \frac{ab^a}{x^{a+1}}$ est continue sur $[b, +\infty[$, l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq b$. On a :

$$\int_b^A \frac{ab^a}{x^{a+1}} dx = ab^a \int_b^A x^{-a-1} dx = ab^a \left[\frac{x^{-a}}{-a} \right]_b^A = ab^a \left(\frac{A^{-a}}{-a} - \frac{b^{-a}}{-a} \right) = 1 - \frac{ab^a}{aA^a} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{car } a > 0$$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_b^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

Ces trois points montrent que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f .

Déterminer la fonction de répartition F_X de X .

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$.

- si $t < b$, on a : $F_X(t) = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$.
- si $t \geq b$, on a d'après les calculs de la question précédente (en remplaçant A par t) :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^b 0 dx + \int_b^t a \frac{b^a}{x^{a+1}} dx = 1 - \frac{ab^a}{at^a} = 1 - \left(\frac{b}{t} \right)^a$$

$$\text{Ainsi, on a : } F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ 1 - \left(\frac{b}{t} \right)^a & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

3. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et donner sa valeur lorsqu'elle existe.

$E(X)$ existe

si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ CVA

si et seulement si $\int_b^{+\infty} x \frac{ab^a}{x^{a+1}} dx$ CV car $f = 0$ sur $]-\infty, b[$

si et seulement si $\int_b^{+\infty} \frac{ab^a}{x^a} dx$ CV.

- Si $a \leq 1$, cette intégrale diverge (intégrale de Riemann).

- Pour $a > 1$, on a pour $A \geq b$:

$$\begin{aligned} \int_b^A \frac{ab^a}{x^a} dx &= ab^a \int_b^A x^{-a} dx = ab^a \left[\frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right]_b^A = ab^a \left(\frac{A^{-a+1}}{-a+1} - \frac{b^{-a+1}}{-a+1} \right) \\ &= \frac{ab^a}{(a-1)b^{a-1}} - \frac{ab^a}{(a-1)A^{a-1}} \\ &= \frac{ab}{(a-1)} - \frac{ab^a}{(a-1)A^{a-1}} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{ab}{(a-1)} \quad \text{car } a > 1 \implies a-1 > 0 \implies \lim_{A \rightarrow +\infty} A^{a-1} = +\infty \end{aligned}$$

Ainsi, $E(X)$ existe si et seulement si $a > 1$ et dans ce cas : $E(W) = \frac{ab}{a-1}$.

4. On suppose dans cette question que $b = 1$ et on note $W = \ln(X)$.

- (a) Donner l'expression de F_X dans ce cas particulier ($b = 1$).

$$\text{On a d'après le résultat de la question 2 (avec } a = 1) : F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \left(\frac{1}{t} \right)^a & \text{si } t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - t^{-a} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- (b) Déterminer la fonction de répartition F_W de W .

Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, on a $W(\Omega) = \mathbb{R}_+$ car $W = \ln(X)$.

- Si $x < 0$, $F_W(x) = 0$ car $W(\Omega) = \mathbb{R}_+$.
- Si $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_W(x) &= P(W \leq x) = P(\ln(X) \leq x) \\ &= P(X \leq e^x) \quad \text{par croissance de la fonction } \exp \\ &= F_X(e^x) \\ &= 1 - (e^x)^{-a} \quad \text{car } x \geq 0 \implies e^x \geq 1 \quad \text{donc deuxième formule de } F_X \\ &= 1 - e^{-ax} \end{aligned}$$

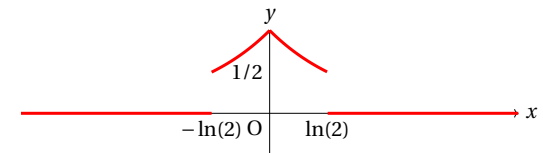
$$\text{Ainsi, on a : } F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- EXERCICE 4 -

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que g est une densité de probabilité. On pourra commencer par étudier la parité de la fonction g .

On remarque que g est paire car $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$.



- g est définie et positive sur $\mathbb{R}$.
- g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-\ln(2), \ln(2)\}$ comme composée sur $]-\ln(2), \ln(2)[$ et comme constante sur $]-\infty, -\ln(2)[$ et $]\ln(2), +\infty[$.

- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} g(t) dt$ converge car g est continue sur $[-\ln(2), \ln(2)]$.
Pour le calcul, on utilise la parité de g . On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt &= \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} g(t) dt \quad \text{car } g \text{ est nulle hors de }]-\ln(2), \ln(2)[\\ &= 2 \int_0^{\ln(2)} g(t) dt \quad \text{par parité de } g \\ &= 2 \int_0^{\ln(2)} e^{-|t|} dt \quad \text{formule de } g \text{ sur cet intervalle} \\ &= 2 \int_0^{\ln(2)} e^{-t} dt \quad \text{car } |t| = t \text{ sur }]0, \ln(2)[\\ &= 2 \left[-e^{-t} \right]_0^{\ln(2)} = 2 \left(-e^{-\ln(2)} + 1 \right) = 2 \left(-\frac{1}{e^{\ln(2)}} + 1 \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = 2 \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Ces trois points montrent que g est une densité de probabilité.

2. On note X une variable aléatoire de densité g .

(a) **Déterminer la fonction de répartition de X . On obtient :** $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln 2 \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{si } -\ln 2 \leq x < 0 \\ \frac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln 2 \\ 1 & \text{si } x > \ln 2 \end{cases}$

Par définition : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x g(t) dt$.

- Si $x < -\ln 2$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

- Si $-\ln 2 \leq x < 0$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\ln 2} 0 dt + \int_{-\ln 2}^x e^{-|t|} dt \quad \text{formules de } g \text{ sur ces intervalles} \\ &= 0 + \int_{-\ln 2}^x e^t dt \quad \text{car } |t| = -t \text{ sur }]-\ln(2), 0[\\ &= \left[e^t \right]_{-\ln 2}^x = e^x - e^{-\ln(2)} = e^x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Si $0 \leq x \leq \ln 2$, alors avec le même principe de découpage :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{-\ln 2} 0 dt + \int_{-\ln 2}^0 e^{-(-t)} dt + \int_0^x e^{-t} dt \quad \text{car } |t| = -t \text{ sur }]-\ln(2), 0[\text{ et } |t| = t \text{ sur }]0, \ln(2)[\\ &= 0 + \left[e^t \right]_{-\ln 2}^0 + \left[-e^{-t} \right]_0^x \\ &= 1 - \frac{1}{2} - e^{-x} + 1 = \frac{3}{2} - e^{-x} \end{aligned}$$

- Si $x > \ln 2$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \quad \text{car } g \text{ est nulle sur }]x, +\infty[\text{ car } x > \ln 2 \\ &= 1 \quad \text{car } g \text{ est une densité de probabilité} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln 2 \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{si } -\ln 2 \leq x < 0 \\ \frac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln 2 \\ 1 & \text{si } x > \ln 2 \end{cases}$$

- (b) **Montrer que X admet une espérance et la calculer.**

$E(X)$ existe

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt$ converge absolument

ssi $\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} t e^{-|t|} dt$ converge (car g est nulle ailleurs).

Cette dernière intégrale converge car $t \mapsto t e^{-|t|}$ est continue sur $[-\ln(2), \ln(2)]$ (intégrale non impropre) donc $E(X)$ existe.

D'autre part, la fonction $t \mapsto t e^{-|t|}$ étant impaire, on a : $E(X) = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} t e^{-|t|} dt = 0$.

Remarque : Si on ne pense pas à cet argument de parité, il faut calculer $E(X) = \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} t e^{-|t|} dt =$

$$\int_{-\ln(2)}^0 t e^{+t} dt + \int_0^{\ln(2)} t e^{-t} dt \quad \text{par IPP.}$$

3. On pose $Y = |X|$.

- (a) **Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité Y .**

Rappel méthode :

Il s'agit de déterminer $Y(\Omega)$ puis la fonction de répartition de Y (en faisant apparaître celle de X) et enfin de vérifier que celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en quelques points et continue sur $\mathbb{R}$.

Comme g est nulle en dehors de $[-\ln(2), \ln(2)]$, on a : $X(\Omega) = [-\ln(2), \ln(2)]$, de qui donne : $Y(\Omega) = [0, \ln(2)]$.

Ainsi, on a :

- si $t < 0$: $F_Y(t) = P(Y \leq t) = 0$.
- si $t > \ln(2)$: $F_Y(t) = P(Y \leq t) = 1$.
- si $t \in [0, \ln(2)]$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(|X| \leq t) \\ &= P(-t \leq X \leq t) \\ &= F_X(t) - F_X(-t) \\ &= \frac{3}{2} - e^{-t} - \left(e^{-t} - \frac{1}{2} \right) = 2 - 2e^{-t} \end{aligned}$$

en prenant garde à utiliser les bonnes formules dans $F_X(t)$ avec $t \in [0, \ln(2)]$ et $-t \in [-\ln(2), 0]$.

$$\text{On obtient alors : } F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2 - 2e^{-t} & \text{si } 0 \leq t \leq \ln 2. \\ 1 & \text{si } t > \ln 2 \end{cases}$$

Ainsi, F_Y est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ (donc continue) sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \ln(2)\}$.

De plus, $\lim_{t \rightarrow 0^+} F_Y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} F_Y(t) = 0 = F_Y(0)$ et $\lim_{t \rightarrow \ln(2)} F_Y(t) = 2 - 2e^{-\ln(2)} = 2 - \frac{2}{e^{\ln(2)}} = 2 - \frac{2}{2} = 1 = F_Y(\ln(2))$ donc F_Y est continue en 0 et en $\ln(2)$ donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, Y est une variable aléatoire à densité et on obtient une densité f_Y de Y en dérivant F_Y sur

$$\mathbb{R} \setminus \{0, \ln(2)\} \text{ et en choisissant } f_Y(0) = 0 \text{ et } f_Y(\ln(2)) = 0 \text{ soit : } f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 2e^{-t} & \text{si } 0 < t < \ln 2. \\ 0 & \text{si } t \geq \ln 2 \end{cases}$$

- (b) **Montrer que Y admet une espérance et la calculer.**

$E(Y)$ existe

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt$ converge absolument

ssi $\int_0^{\ln(2)} 2te^{-t} dt$ converge (car f_Y est nulle ailleurs).

Or, on a par IPP avec $u(t) = 2t$ et $v(t) = -e^{-t}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln(2)]$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} 2te^{-t} dt &= [-2te^{-t}]_0^{\ln(2)} + \int_0^{\ln(2)} 2e^{-t} dt \\ &= -2\ln(2)\underbrace{e^{-\ln(2)}}_{=1/2} + [-2e^{-t}]_0^{\ln(2)} \\ &= -\ln(2) - 2e^{-\ln(2)} + 2 = 1 - \ln(2)\end{aligned}$$

donc $E(Y)$ existe et $E(Y) = 1 - \ln(2)$.

4. On pose $Z = X^2$.

(a) **Montrer que Z est une variable à densité et déterminer une densité Z .**

Comme $X(\Omega) = [-\ln(2), \ln(2)]$, on a : $Z(\Omega) = [0, (\ln(2))^2]$.

Ainsi, on a :

- si $t < 0$: $F_Z(t) = P(Z \leq t) = 0$.
- si $t > (\ln(2))^2$: $F_Z(t) = P(Z \leq t) = 1$.
- si $t \in [0, (\ln(2))^2]$, on a :

$$\begin{aligned}F_Z(t) &= P(Z \leq t) = P(X^2 \leq t) \\ &= P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) \\ &= F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) \\ &= \frac{3}{2} - e^{-\sqrt{t}} - \left(e^{-\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\right) = 2 - 2e^{-\sqrt{t}}\end{aligned}$$

en prenant garde à utiliser les bonnes formules dans $F_X(t)$ avec $t \in [0, \ln(2)]$ et $-t \in [-\ln(2), 0]$.

$$\text{On obtient alors : } F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2 - 2e^{-\sqrt{t}} & \text{si } 0 \leq t \leq (\ln(2))^2 \\ 1 & \text{si } t > (\ln(2))^2 \end{cases}.$$

Ainsi, F_Z est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ (donc continue) sur $\mathbb{R} \setminus \{0, (\ln(2))^2\}$.

De plus, $\lim_{t \rightarrow 0^+} F_Z(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} F_Z(t) = 0 = F_Y(0)$ et $\lim_{t \rightarrow (\ln(2))^2} F_Z(t) = 2 - 2e^{-\ln(2)} = \dots = 1 = F_Z(\ln(2))$ donc

F_Z est continue en 0 et en $(\ln(2))^2$ donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, Z est une variable aléatoire à densité et on obtient une densité f_Z de Z en dérivant F_Z sur $\mathbb{R} \setminus \{0, (\ln(2))^2\}$ et en choisissant $f_Z(0) = 0$ et $f_Z((\ln(2))^2) = 0$ soit (dérivée d'une composée pour $e^{-\sqrt{t}}$) :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t < (\ln(2))^2 \\ 0 & \text{si } t \geq (\ln(2))^2 \end{cases}.$$

(b) **Montrer, en utilisant le théorème de transfert, que Z admet une espérance et la calculer.**

D'après le théorème de transfert, on a avec $Z = X^2$:

$E(Z) = E(X^2)$ existe

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt$ converge absolument

ssi $\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} t^2 e^{-|t|} dt$ converge (car f_Y est nulle ailleurs).

Cette dernière intégrale converge (fonction continue) donc $E(Z) = E(X^2)$ existe.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}E(Z) &= \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} t^2 e^{-|t|} dt \\ &= 2 \int_0^{\ln(2)} t^2 e^{-t} dt \quad \text{car } t \mapsto t^2 e^{-|t|} \text{ est paire} \\ &= 2 \int_0^{\ln(2)} t^2 e^{-t} dt\end{aligned}$$

On calcule ensuite $\int_0^{\ln(2)} t^2 e^{-t} dt$ par IPP avec $u(t) = t^2$ et $v(t) = -e^{-t}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \ln(2)]$:

$$\int_0^{\ln(2)} t^2 e^{-t} dt = [-t^2 e^{-t}]_0^{\ln(2)} + \underbrace{\int_0^{\ln(2)} 2te^{-t} dt}_{=E(Y) \text{ déjà calculé}} = -(\ln(2))^2 e^{-\ln(2)} + 1 - \ln(2) = 1 - \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

$$\text{Finalement : } E(Z) = 2 \left(1 - \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2} \right) = 2 - 2\ln(2) - (\ln(2))^2.$$

- EXERCICE 5 -

1. **On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.**

Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on notera U .

On dit que U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Remarque : Ici, on ne sait pas que F est une fonction de répartition. Il faut donc vérifier les 4 points (cf cours).

- Par définition, on a directement (F constante) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
- F est clairement croissante sur $\mathbb{R}$ (affine sur $[0, 1]$ et constante ailleurs).
- F est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ (donc continue) sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
- De plus, $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = F(0)$ et $\lim_{t \rightarrow 1} F(t) = 1 = F(1)$ donc F est continue en 0 et en 1 donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

2. **Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{ae^{-ax}}{(1 + e^{-ax})^2}$.**

(a) **Montrer que f est une densité de probabilité.**

- f est positive sur $\mathbb{R}$ car $a > 0$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de dénominateur non nul.

- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

On connaît une primitive (f de la forme $\frac{-u'}{u^2}$). On calcule :

$$\int_A^0 \frac{ae^{-ax}}{(1 + e^{-ax})^2} dx = \left[\frac{1}{(1 + e^{-ax})} \right]_A^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{(1 + e^{-aA})} \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \quad \text{car } a > 0.$$

$$\text{Ainsi, } \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

De même :

$$\int_0^A f(x) dx = \left[\frac{1}{(1 + e^{-ax})} \right]_0^A = \frac{1}{(1 + e^{-aA})} - \frac{1}{2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{2} \quad \text{car } a > 0.$$

$$\text{Ainsi, } \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

On conclut avec la relation de Chasles que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut 1.

(b) **On note X une variable aléatoire de densité f . Déterminer la fonction de répartition de X .**

On obtient d'après les calculs précédents : $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^x f(t) dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{(1 + e^{-ax})} \right]_A^x = \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{(1 + e^{-ax})} - \frac{1}{(1 + e^{-aA})} = \frac{1}{(1 + e^{-ax})}$$

3. **On suppose que $a = 1$.**

(a) **Montrer que la fonction h définie sur $]0, 1[$ par $h : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$.**

$x \mapsto \frac{x}{1-x}$ est dérivable sur $]0, 1[$ car quotient ($x \neq 1$) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (car $x > 0$ et $1 - x > 0$).

$t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc h est dérivable sur $]0, 1[$ par composition. On a pour tout $x \in]0, 1[$:

$$h'(x) = \frac{\frac{1-x+x}{(1-x)^2}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{x(1-x)} > 0$$

Ainsi, h est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$ donc réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow 1} h(x), \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \right[=]-\infty, +\infty[$.

En effet, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = +\infty$ par quotient donc $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$ par composition. De même pour $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

- (b) On pose $Z = \ln\left(\frac{U}{1-U}\right)$ où U est définie à la question 1.

Déterminer $Z(\Omega)$ puis montrer que Z suit la même loi que X (avec $a = 1$).

Il s'agit de montrer que Z a même fonction de répartition que X .

D'après la question précédente, on a : $X(\Omega) =]0, 1[$ donc $Z(\Omega) = h(X)(\Omega) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Z \leq t) = P\left(\ln\left(\frac{U}{1-U}\right) \leq t\right) \\ &= P\left(\frac{U}{1-U} \leq e^t\right) \text{ car exp est croissante} \\ &= P(U \leq e^t(1-U)) \quad \text{car } 1-U > 0 \\ &= P(U + e^t U \leq e^t) \\ &= P(U(1+e^t) \leq e^t) \\ &= P\left(U \leq \frac{e^t}{1+e^t}\right) \\ &= P\left(U \leq \frac{1}{1+e^{-t}}\right) \\ &= F\left(\frac{1}{1+e^{-t}}\right) \quad \text{car } F \text{ est la fonction de répartition de } U \end{aligned}$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\frac{1}{1+e^{-t}} \in]0, 1[$ et on sait que $F(x) = x$ pour $x \in]0, 1[$.

On obtient donc : $F_Z(t) = F\left(\frac{1}{1+e^{-t}}\right) = \frac{1}{1+e^{-t}} = F_X(t)$ avec $a = 1$.

Ainsi, Z suit la même loi que X (avec $a = 1$).

- EXERCICE 6 -

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. (a) Montrer que f est une densité de probabilité.

- $x\sqrt{2x} \geq 0$ sur $[2, +\infty[$ donc f est clairement positive sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $[2, +\infty[$ comme quotient (de dénominateur non nul) de fonctions continues et sur $]-\infty, 2[$ comme constante. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ CV ssi $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ CV car f est nulle sur $]-\infty, 2[$. Soit $A \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} \int_2^A \frac{1}{x\sqrt{2x}} dx &= \int_2^A \frac{1}{\sqrt{2}} x^{-3/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} \right]_2^A \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-2x^{-1/2} \right]_2^A \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-2A^{-1/2} + 2 \cdot 2^{-1/2} \right] \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A}} \quad \text{après simplification} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{par quotient} \end{aligned}$$

Finalement l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ CV et vaut 1.

Ces trois points permettent d'affirmer que f est une densité de probabilité.

- (b) Soit X une variable dont f est une densité. Déterminer la fonction de répartition de X , notée F .

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$.

• Si $t \leq 2$, on a : $F_X(t) = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$.

• Si $t > 2$, on a d'après le calcul de la question précédente, en remplaçant A par t :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_2^t f(x) dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}.$$

$$\text{Finalement, on a : } F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 2 \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 2 \end{cases}.$$

- (c) Calculer $P(X \geq 4)$ puis $P_{[X \geq 4]}(X < 8)$.

On a :

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - P(X \leq 4) \quad \text{car variable à densité} \\ &= 1 - F_X(4) \\ &= 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} \quad \text{car } 4 \geq 2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} P_{[X \geq 4]}(X < 8) &= \frac{P((X \geq 4) \cap (X < 8))}{P(X \geq 4)} \\ &= \frac{P(4 \leq X < 8)}{P(X \geq 4)} \\ &= \frac{F_X(8) - F_X(4)}{P(X \geq 4)} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

- (d) X admet-elle une espérance?

X admet une espérance

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ CVA

ssi $\int_2^{+\infty} x f(x) dx$ CV car f est nulle sur $]-\infty, 2[$ et positive ailleurs ssi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}} dx$ CV.

Or, l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ DV ($\alpha = 1/2 < 1$) donc X n'admet pas d'espérance.

On considère trois variables X_1, X_2, X_3 indépendantes et toutes de même loi que X .

2. On pose $V = \sup(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

- (a) Déterminer la fonction de répartition H de V .

Il s'agit de déterminer pour tout réel x , $H(x) = P(V \leq x)$.

Commençons par remarquer (théorème non officiel des Dalton!) que $[V \leq x] = [(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap (X_3 \leq x)]$.

En effet, si $[V \leq x]$ i.e $[\sup(X_1, X_2, X_3) \leq x]$ alors pour tout $i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ comme $X_i \leq V$ (par définition), on a : $X_i \leq x$ donc $[(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap (X_3 \leq x)]$.

Réciproquement, si $[(X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap (X_3 \leq x)]$, V (qui est l'un des X_i) est également inférieur à x .

soit $[V \leq x]$.

On a alors :

$$\begin{aligned} H(x) &= P(V \leq x) = P(\sup(X_1, X_2, X_3) \leq x) \\ &= P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap (X_3 \leq x)) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x)P(X_3 \leq x) \quad \text{par indépendance des } X_i \\ &= (P(X \leq x))^3 \quad \text{car les variables suivent la même loi que } X \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{d'après la fonction de répartition de } X \end{aligned}$$

(b) **Montrer que V est une variable à densité, et donner une densité de V .**

D'après la question précédente, on a : $H(x) = (P(X \leq x))^3$ soit $H(x) = F_X(x)^3$.

Ainsi, H est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée.

De plus, H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme composée (car F_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $t \mapsto t^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

Donc V une variable aléatoire à densité.

On obtient une densité h de V en dérivant H pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et en choisissant par exemple $h(2) = 0$:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)' \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 \left(-\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2}\right)\right) \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{soit : } h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{1}{x^{3/2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}.$$

(c) **La variable V admet-elle une espérance?**

V admet une espérance

$$\text{ssi } \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx \text{ CVA}$$

$$\text{ssi } \int_2^{+\infty} xh(x)dx \text{ CV car } h \text{ est nulle sur }]-\infty, 2[\text{ et positive ailleurs}$$

$$\text{ssi } \int_2^{+\infty} \frac{-3\sqrt{2}}{2} \frac{x}{x^{3/2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 dx \text{ CV}$$

$$\text{ssi } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 dx \text{ CV.}$$

Vu la tête de l'intégrande, on ne va pas chercher à calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx$. On va plutôt chercher du côté du TCIFP.

$$\text{On a : } \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} 1 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{donc } \frac{1}{x^{1/2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{1/2}}.$$

L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx$ diverge comme intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/2 > 1$.

Le fonctions étant continues et positives, le TCIFP permet de conclure que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 dx \text{ DV et donc que } V \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

3. **On pose $U = \inf(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une variable aléatoire.**

(a) **Déterminer la fonction de répartition G de U .**

Il s'agit de déterminer pour tout réel x , $G(x) = P(U \leq x)$.

Commençons par remarquer comme pour le sup (théorème non officiel des Daltons!) que :

$$[U > x] = [(X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap (X_3 > x)].$$

On a alors :

$$\begin{aligned} G(x) &= P(U \leq x) \\ &= 1 - P(U > x) \\ &= 1 - P(\sup(X_1, X_2, X_3) > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap (X_3 > x)) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x)P(X_3 > x) \quad \text{par indépendance des } X_i \\ &= 1 - (P(X > x))^3 \quad \text{car les variables suivent la même loi que } X \\ &= 1 - (1 - F_X(x))^3 \end{aligned}$$

On a alors en utilisant la fonction de répartition de X :

$$\begin{aligned} G(x) &= \begin{cases} 1 - (1 - 0)^3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - \left(1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - 2^{3/2} x^{-3/2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) **Montrer que U est une variable à densité, et donner une densité de U .**

Comme pour V , on montre que U est une variable à densité et on obtient une densité g de U en dérivant G pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et en choisissant par exemple $g(2) = 0$:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ -2^{3/2} \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 3\sqrt{2} x^{-5/2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(c) **Montrer que U admet une espérance et la calculer.**

U admet une espérance

$$\text{ssi } \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx \text{ CVA}$$

$$\text{ssi } \int_2^{+\infty} xg(x)dx \text{ CV car } g \text{ est nulle sur }]-\infty, 2[\text{ et positive ailleurs}$$

$$\text{ssi } \int_2^{+\infty} 3\sqrt{2} x \cdot x^{-5/2} dx \text{ CV}$$

$$\text{ssi } \int_2^{+\infty} 3\sqrt{2} x^{-3/2} dx \text{ CV}$$

C'est le cas car on reconnait une intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ avec $\alpha = 3/2 > 1$.

Donc U admet une espérance. Calculons la.

On a alors en remarquant qu'on peut faire apparaître f .

$$E(U) = \int_2^{+\infty} 3\sqrt{2} x^{-3/2} dx = 3\sqrt{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 3\sqrt{2} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}} dx = 6 \underbrace{\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}} dx}_{=1 \text{ d'après Q1}} = 6$$

Si on ne pense pas à cette astuce de calcul, on calcule à la main. Soit $A \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} \int_2^A 3\sqrt{2} x^{-3/2} dx &= 3\sqrt{2} \left[\frac{x^{-3/2+1}}{-3/2+1} \right]_2^A = 3\sqrt{2} [-2x^{-1/2}]_2^A \\ &= 3\sqrt{2} [-2A^{-1/2} + 2 \cdot 2^{-1/2}] \\ &= 6 - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{A}} \quad \text{après simplification} \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 6 \quad \text{par quotient} \end{aligned}$$

Donc $E(U) = 6$.

- EXERCICE 7 -

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Montrer la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 0$. On a :

$$\int_0^A \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{1+x} \right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$ converge et vaut 1.

2. Étudier la parité de f puis montrer que f est une densité de probabilité.

La fonction f est clairement paire (car $|-x| = |x|$).

• f est positive sur $\mathbb{R}$.

• f est continue sur $\mathbb{R}$ par composée et quotient ($1+|x| \geq 1 > 0$).

• L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge

ssi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge car f est paire

ssi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)^2} dx$ converge car $|x| = x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Or, cette intégrale converge d'après la question précédente et on a par parité de f :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+x)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = 1$$

Ces trois point permettent d'affirmer que f est une densité de probabilité.

On note X une variable aléatoire admettant f comme densité et F la fonction de répartition de X .

3. X admet-elle une espérance ?

$E(X)$ existe

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge absolument

ssi $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ converge car $x \mapsto xf(x)$ est impaire

Or, on a pour tout $x \geq 0$: $xf(x) = \frac{x}{2(1+x)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$.

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ diverge.

Les fonctions sont continues et positives donc d'après le TCIPF, l'intégrale $\int_1^{+\infty} xf(x) dx$ diverge également.

Ainsi, X n'admet pas d'espérance.

4. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Déterminer $Y(\Omega)$

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, on a : $1+|X| \geq 1$ donc $Y = \ln(1+|X|) \geq 0$ (par croissance de la fonction $\ln$) donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

(b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F . On ne cherchera pas à calculer F .

Soit $t \in \mathbb{R}_-$. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, on a : $G(t) = F_Y(t) = P(Y \leq t) = 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$G(t) = F_Y(t) = P(Y \leq t)$$

$$= P(\ln(1+|X|) \leq t)$$

$$= P(1+|X| \leq e^t) \quad \text{car exp est croissante}$$

$$= P(|X| \leq e^t - 1)$$

$$= P(-(e^t - 1) \leq X \leq e^t - 1) \quad \text{car } e^t - 1 \geq 0 \text{ pour } t \geq 0$$

$$= P(1 - e^t \leq X \leq e^t - 1)$$

$$= F_X(e^t - 1) - F_X(1 - e^t)$$

$$\text{Ainsi, } G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ F_X(e^t - 1) - F_X(1 - e^t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}.$$

(c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

L'énoncé a admis que Y était une variable à densité (il faudrait vérifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$).

On obtient une densité g de Y en dérivant G sur $\mathbb{R}^*$ (F_X est dérivable sur $\mathbb{R}_*$ et $e^t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0$), ce qui donne :

pour tout $t < 0$: $g(t) = 0$.

pour tout $t > 0$ (par dérivation d'une composée) :

$$\begin{aligned} g(t) &= (F_X(e^t - 1))' - (F_X(1 - e^t))' = e^t F_X'(e^t - 1) - (-e^t F_X'(1 - e^t)) \\ &= e^t f(e^t - 1) + e^t f(1 - e^t) \\ &= 2e^t f(e^t - 1) \quad \text{car } f(1 - e^t) = f(e^t - 1) \text{ par parité de } f \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, on a bien : } g(t) = \begin{cases} 2e^t f(e^t - 1) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \text{ en choisissant une valeur adaptée pour : } g(0) = 1.$$

(d) Déterminer l'expression de g .

Il reste à remplacer par l'expression de f , ce qui donne :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2e^x \frac{1}{2(1+e^x-1)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^x}{(e^x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il s'agit en fait de la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour aller plus loin...

- EXERCICE 8 -

Pour tout réel x , on note $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire admettant comme

fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (Y = k) = (k \leq X < k + 1)$.

1. (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, Y prend des valeurs entières positives donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

- (b) **Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.**

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} P(Y = k - 1) &= P(k - 1 \leq X < k) \\ &= F_X(k) - F_X(k - 1) \\ &= 1 - e^{-\lambda k} - 1 + e^{-\lambda(k-1)} \\ &= \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1} \left(1 - e^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

- (c) **En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.**

$(Y + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(Y + 1 = k) = P(Y = k - 1) = \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1} \left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

Ainsi, $Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\left(1 - e^{-\lambda}\right)$

- (d) **Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .**

$$\text{On a donc : } E(Y + 1) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \quad \text{et} \quad V(Y + 1) = \frac{e^{-\lambda}}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^2}.$$

$$\text{Par linéarité de l'espérance : } E(Y + 1) = E(Y) + 1 = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \quad \text{soit} \quad E(Y) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

$$\text{D'autre part : } V(Y) = V(Y + 1) = \frac{e^{-\lambda}}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^2}.$$

2. On pose $Z = X - Y$.

- (a) **Déterminer $Z(\Omega)$.**

Par définition de Y , on a : $Y \leq X < Y + 1$, ce qui donne : $0 \leq X - Y < 1$ soit $0 \leq Z < 1$.

Ainsi : $Z(\Omega) = [0, 1[$.

- (b) **Montrer que :** $[(Z \leq x) \cap (Y = k)] = [k \leq X \leq k + x]$.

On a :

$$\begin{aligned} [(Z \leq x) \cap (Y = k)] &= [(X - Y \leq x) \cap (Y = k)] \\ &= [(X - k \leq x) \cap (Y = k)] \\ &= [(X \leq k + x) \cap (k \leq X < k + 1)] \\ &= [k \leq X < k + x] \end{aligned}$$

car $k + x < k + 1$ car $x < 1$.

- (c) **En déduire que :** $\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$

Soit $x \in [0, 1[$.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} F_Z(x) = P(Z \leq x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P((Z \leq x) \cap (Y = k)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leq X < k + x) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} F_X(k + x) - F_X(k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} 1 - e^{-\lambda(k+x)} - 1 + e^{-\lambda k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda}\right)^k = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

car on reconnaît une série géométrique qui converge ($0 < e^{-\lambda} < 1$).

- (d) **En déduire une densité f de Z .**

Comme $Z(\Omega) = [0, 1[$, on a : $F_Z(x) = 0$ pour $x < 0$ et $F_Z(x) = 1$ pour $x \geq 1$, ce qui donne avec la question

$$\text{précédente : } F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ (comme constante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ et comme composée sur $]0, 1[$).

En particulier, F_Z est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. De plus F_Z est clairement continue en 0 et en 1 en 1 donc F_Z est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, Z est une variable aléatoire à densité et on obtient une densité f de Z en dérivant F_Z sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$$\text{et en choisissant } f(0) = f(1) = 0 \text{ par exemple : } f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (e) **Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z .**

$E(Z)$ existe

ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument

ssi $\int_0^1 x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} dx$ converge (car f est positive sur $]0, 1[$ et nulle ailleurs).

Cette intégrale converge (intégrande continu sur $[0, 1]$ donc $E(Z)$ existe et on a en faisant une IPP :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \left(\int_0^1 \lambda x e^{-\lambda x} dx \right) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \left(\left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-\lambda x} dx \right) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \left(-e^{-\lambda} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \left(-e^{-\lambda} + \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right) \\ E(Z) &= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

On remarque que : $E(Z) = E(X) - E(Y)$ ce qui correspond à la linéarité de l'espérance que l'on ne pouvait pas utiliser directement car X est une variable à densité et Y une variable discrète.